2025학년도 6월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	⑤	3	①	4	③	5	③
6	⑤	7	④	8	③	9	②	10	④
11	②	12	①	13	②	14	⑤	15	②
16	③	17	①	18	②	19	④	20	②
21	①	22	17	23	3	24	270	25	7
26	21	27	23	28	8	29	65	30	114

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$(1+2i)-5i=1+(2-5)i=1-3i$

2. [출제의도] 나머지정리 계산하기

$P(x)=x^2-2x+6$ 이라 하면 나머지정리에 의하여
$P(-1)=(-1)^2-2\times(-1)+6=9$

3. [출제의도] 이차부등식 계산하기

$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)<0$ 의 해는
$1<x<4$ 이므로 $a=4$

4. [출제의도] 두 복소수가 같을 조건 이해하기

$(a+4)+bi=b+(2-i)i=(b+1)+2i$ 이므로
$b=2$, $a=-1$
따라서 $a+b=1$

5. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기

x 에 대한 이차방정식 $x^2-4\sqrt{3}x+a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지기 위해서는
판별식 $D=(4\sqrt{3})^2-4a>0$
$a<12$ 이므로 조건을 만족시키는
자연수 a 의 개수는 11

6. [출제의도] 연립일차부등식의 해 계산하기

$3x\ge x-3$ 의 해는 $x\ge -\frac{3}{2}$ …… ㉠
$2x+1\le 11$ 의 해는 $x\le 5$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $-\frac{3}{2}\le x\le 5$
연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x 는
-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 이므로 합은 14

7. [출제의도] 다항식의 연산 이해하기

축전기 A, B 의 전기용량을 각각 C_A, C_B 라 하면
$C_A=3C_B$
축전기 A, B 의 전압을 각각 V_A, V_B 라 하면
$V_A=\frac{2}{3}V_B$
$U_A=\frac{1}{2}C_AV_A{}^2=\frac{1}{2}\times 3C_B\times\left(\frac{2}{3}V_B\right)^2$
$=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}C_BV_B{}^2=\frac{4}{3}U_B$ 이므로
$\frac{U_A}{U_B}=\frac{4}{3}$

8. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$ 이므로
$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta-1)$
$=5\times(3-1)=10$

9. [출제의도] 연립이차방정식 계산하기

$x=y+3$ 을 $2x^2+y^2=6$ 에 대입하면
$2(y+3)^2+y^2=6$
$2(y^2+6y+9)+y^2=6$
$3(y+2)^2=0$
$y=\beta=-2$
$x=\alpha=\beta+3=1$
따라서 $\alpha+\beta=-1$

10. [출제의도] 인수분해를 이용하여 문제 해결하기

$x=2026$ 이라 하면
$\frac{2026^3+1}{2025^2+2026}=\frac{x^3+1}{(x-1)^2+x}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$
$=x+1=2027$

11. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

직선 $y=mx+2$ 가 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2+5$ 의
그래프에 접하므로 $\frac{1}{3}x^2+5=mx+2$
방정식 $x^2-3mx+9=0$ 의
판별식 $D_1=(3m)^2-36=0$, $m^2=4$,
$m=2\ (m>0)$
직선 $y=2x+2$ 가 이차함수 $y=x^2+4x+n$ 의
그래프에 접하므로 $x^2+4x+n=2x+2$
방정식 $x^2+2x+n-2=0$ 의
판별식 $D_2=2^2-4(n-2)=0$, $n=3$
따라서 $m+n=5$

12. [출제의도] 나머지정리 이해하기

다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
나머지가 1 이므로
$P(x)=(x-2)Q_1(x)+1$ …… ㉠
$Q_1(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 몫이 x^2+2x-8 이고
나머지가 5 이므로
$Q_1(x)=(x-2)(x^2+2x-8)+5$ …… ㉡
이다. ㉡을 ㉠에 대입하면
$P(x)=(x-2)^2(x^2+2x-8)+5(x-2)+1$
이다.
따라서 $P(3)=(3-2)^2(9+6-8)+5+1=13$

13. [출제의도] 이차방정식의 근 이해하기

$P(\alpha)=5\alpha-2$, $P(\beta)=5\beta-2$ 이므로
방정식 $P(x)-(5x-2)=0$ 은 α, β 를 근으로 가진다.
$P(x)-(5x-2)$ 는 $x-\alpha$, $x-\beta$ 를 인수로 가지므로
$P(x)-5x+2=(x-\alpha)(x-\beta)$ 는 x 에 대한 항등식이다.
$P(x)-5x+2=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-7x+5$
$P(x)=x^2-2x+3$
따라서 $P(5)=18$

14. [출제의도] 다항식의 연산 문제 해결하기

$\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$, $\overline{BF}=z$ 라 하면
$x+y+z=4\sqrt{2}$
$xyz=4\sqrt{2}$
$\overline{AG}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{3}$ 이므로
$x^2+y^2+z^2=12$
$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
$12=(4\sqrt{2})^2-2(xy+yz+zx)$
$xy+yz+zx=10$
$S_1^2+S_2^2+S_3^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$
$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$
$=10^2-2\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}$
$=100-64=36$

15. [출제의도] 복소수의 연산 이해하기

$z=1-i$ 이므로
$\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}\right)^n=\left(\frac{\bar{z}-z}{z\bar{z}}\right)^n=i^n$
$(z-1)\,i=1$
$i^n=1$ 을 만족시키는 50 이하의 자연수 n 은
4, 8, 12, $\cdots$, 48 이므로 n 의 개수는 12

16. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 문제 해결하기

$a+b=t$ 라 하면
방정식 $x^2-(t+1)x+t=0$ 의
판별식 $D=(t+1)^2-4t=(t-1)^2=0$ 이므로
$b=1-a$ 이다.
$S_1=\frac{a-1}{2}$,
$S_2=\frac{a^2}{2}-S_1=\frac{a^2-a+1}{2}$ 이다.
$S_1:S_2=2:7$ 이므로
$\frac{a-1}{2}:\frac{a^2-a+1}{2}=2:7$
따라서 $a=3\ (a>2)$ 이다.
$f(a)=\frac{a-1}{2}$, $g(a)=\frac{a^2-a+1}{2}$, $p=3$ 이므로
$f(5)+g(5)+p=2+\frac{21}{2}+3=\frac{31}{2}$

17. [출제의도] 인수정리를 이용하여 문제 해결하기

$P(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 몫과 나머지가 같으므로
그 몫과 나머지를 $Q(x)$ 라 하자.
$P(x)=(x^2-1)Q(x)+Q(x)=x^2Q(x)$
$(x+1)P(x)=(x+1)x^2Q(x)$ 에서
$(x+1)P(x)$ 가 $x^2-1=(x+1)(x-1)$ 로
나누어떨어지므로 $2P(1)=0$
그러므로 $P(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 가지고,
최고차항의 계수가 1 이므로
$Q(x)=x-1$
따라서 $P(x)=x^2(x-1)$ 이므로
$P(4)=48$

18. [출제의도] 절댓값을 포함한 연립부등식 문제 해결하기

$2x+3>5$ 의 해는 $x>1$ …… ㉠
$|ax-1|<21$
$-21<ax-1<21$
$-20<ax<22$ …… ㉡
ⅰ) $a>0$ 인 경우
㉡의 해는 $-\frac{20}{a}<x<\frac{22}{a}$ …… ㉢
㉠, ㉢을 만족시키는 x 가 존재한다면 연립부등식의
해는 $1<x<\frac{22}{a}$ 이다.
$1<x<\frac{22}{a}$ 를 만족시키는 자연수 x 의 개수가 2 가
되려면 $3<\frac{22}{a}\le 4$
정수 a 의 값은 6, 7 이다.
ⅱ) $a=0$ 인 경우
㉡의 해는 모든 실수이다.
연립부등식의 해는 $x>1$ 이므로
연립부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 2 가
될 수 없다.
ⅲ) $a<0$ 인 경우

ㄴ의 해는 $\frac{22}{a} < x < -\frac{20}{a}$ …… ㄹ

ㄱ, ㄹ을 만족시키는 x가 존재한다면 연립부등식의 해는 $1 < x < -\frac{20}{a}$ 이다.

$1 < x < -\frac{20}{a}$ 을 만족시키는 자연수 x의 개수가

2가 되려면 $3 < -\frac{20}{a} \le 4$

정수 a의 값은 -5, -6이다.

ⅰ)~ⅲ)에 의하여 모든 정수 a의 값은 -6, -5, 6, 7이므로 합은 2

19. [출제의도] 복소수 문제 해결하기

ⅰ) $P(1) > 0$인 경우

$\sqrt{P(1)}$ 은 실수, $\sqrt{-P(1)}$ 은 허수이고

$\sqrt{P(1)} + \sqrt{-P(1)} - \sqrt{P(0)-4}$ 가 실수가 되려면

$\sqrt{-P(1)} - \sqrt{P(0)-4}$ 가 실수이어야 한다.

$\sqrt{-P(1)}$, $\sqrt{P(0)-4}$ 는 실수부분이 0인 허수이므로 $\sqrt{-P(1)} - \sqrt{P(0)-4} = 0$ 이다.

$-P(1) = P(0)-4$, $-(8-2a) = 3-a$, $a = \frac{11}{3}$

$P(x) = x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{10}{3}$

$P(1) = \frac{2}{3} > 0$ 이므로 $P(-4) = 34$

ⅱ) $P(1) < 0$인 경우

$\sqrt{-P(1)}$ 은 실수, $\sqrt{P(1)}$ 은 허수이고

$\sqrt{P(1)} + \sqrt{-P(1)} - \sqrt{P(0)-4}$ 가 실수가 되려면

$\sqrt{P(1)} - \sqrt{P(0)-4}$ 가 실수이어야 한다.

$\sqrt{P(1)}$, $\sqrt{P(0)-4}$ 는 실수부분이 0인 허수이므로

$\sqrt{P(1)} - \sqrt{P(0)-4} = 0$이다.

$P(1) = P(0)-4$, $8-2a = 3-a$, $a = 5$

$P(x) = x^2 - 5x + 2$

$P(1) = -2 < 0$ 이므로 $P(-4) = 38$

ⅲ) $P(1) = 0$인 경우

$a = 4$, $P(x) = x^2 - 4x + 3$

$P(0) = 3$ 이므로 $\sqrt{P(1)} + \sqrt{-P(1)} - \sqrt{P(0)-4}$ 는 실수가 아니다.

ⅰ)~ⅲ)에 의하여 모든 $P(-4)$의 값의 합은 72

20. [출제의도] 연립이차부등식 추론하기

ㄱ. $\begin{cases} -x^2 + (b-1)x + b < 0 \\ (b-1)x^2 + bx - 1 < 0 \end{cases}$

ⅰ) $-x^2 + (b-1)x + b < 0$의 해는

ⅰ-1) $b > -1$일 때, $x < -1$ 또는 $x > b$

ⅰ-2) $b < -1$일 때, $x < b$ 또는 $x > -1$

ⅰ-3) $b = -1$일 때, $x \ne -1$인 모든 실수

ⅱ) $(b-1)x^2 + bx - 1 < 0$의 해는

ⅱ-1) $b-1 > 0$이면 $(b-1)x^2 + bx - 1 = 0$의 판별식 $D = b^2 + 4(b-1) > 0$이므로 연립부등식의 해가 $x < p$가 될 수 없다.

ⅱ-2) $b-1 < 0$이면 이차부등식의 해는 ㄱ $x < \alpha$ 또는 $x > \beta\,(\alpha < \beta)$, ㄴ $x \ne \alpha$인 모든 실수, ㄷ x는 모든 실수 중 하나이므로 연립부등식의 해가 $x < p$가 될 수 없다.

ⅱ-3) $b-1 = 0$이면 이차부등식의 해는 $x < 1$이므로 연립부등식의 해는 $x < -1$이다. 따라서 $p = -1$이다. (참)

ㄴ. 연립부등식의 해가 $x < p$이려면 두 부등식 중 적어도 하나는 일차부등식이어야 한다.

ⅰ) $a = 0$인 경우

$\begin{cases} bx + b + 1 < 0 \\ bx^2 + (b+1)x < 0 \end{cases}$

ⅰ-1) $b > 0$일 때,

$\begin{cases} x < -\frac{b+1}{b} \\ -\frac{b+1}{b} < x < 0 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해가 없다.

ⅰ-2) $b = 0$일 때,
$1 < 0$이므로 연립부등식의 해가 없다.

ⅰ-3) $b < 0$일 때,

$\begin{cases} bx + b + 1 < 0 \\ x(bx + b + 1) < 0 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는

ㄱ $x > -\frac{b+1}{b}$, ㄴ $x > 0$ 중 하나가 되어 연립부등식의 해가 $x < p$가 될 수 없다.

ⅱ) $a + b = 0$인 경우

$\begin{cases} ax^2 + 1 < 0 \\ x + a < 0 \end{cases}$

ⅱ-1) $a > 0$일 때,
$ax^2 + 1 > 0$이므로 연립부등식의 해가 없다.

ⅱ-2) $a < 0$일 때,

$ax^2 + 1 < 0$에서 $x < -\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 또는 $x > \sqrt{-\frac{1}{a}}$

$x + a < 0$에서 $x < -a$이므로

$-a \le \sqrt{-\frac{1}{a}}$ 이면 연립부등식의 해가

$x < -\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 이다.

따라서 $a + b = 0$이고 $a < 0$이므로 $b > 0$이다. (참)

ㄷ. ㄴ에 의해 $a < 0$이고 $-a \le \sqrt{-\frac{1}{a}}$ 이므로

$a^2 \le -\frac{1}{a}$

따라서 $a^3 \ge -1$ (거짓)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 추론하기

α, β는 두 함수 $y = f(x)$, $y = k - x$의 그래프의 교점의 x좌표이다. …… ㄱ

(가)에서 $f(\beta) + \beta = k$, $2\beta = k$, $\beta = \frac{k}{2}$

β가 자연수이므로 k는 짝수이다. …… ㄴ

$f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2}$ 이고, (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \ge \frac{k}{2}$ 이므로 $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k}{2}$ 이다.

ㄱ에 의하여 $0 < \alpha < \beta\left(= \frac{k}{2}\right)$ 이므로

$\alpha = \frac{k}{2} - p$ (p는 자연수, $p < \frac{k}{2}$)라 하자.

ㄱ에 의하여 $f\left(\frac{k}{2} - p\right) = \frac{k}{2} + p$

$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{k}{2} - p\right) - \frac{k}{2}\right\}^2 + \frac{k}{2} = \frac{k}{2} + p$, $p = 2$

그러므로 $\alpha = \frac{k}{2} - 2$이다.

$f(0) \le \alpha + \beta + f(\alpha)$ 이므로

$\frac{1}{2} \times \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2} \le \left(\frac{k}{2} - 2\right) + \frac{k}{2} + \left(\frac{k}{2} + 2\right)$

$0 \le k \le 8$이고, ㄴ에 의하여 $k = 2$, 4, 6, 8이다.

$k = 2$일 때, $\alpha = -1$이므로 α는 자연수가 아니다.

$k = 4$일 때, $\alpha = 0$이므로 α는 자연수가 아니다.

$k = 6$일 때, $\alpha = 1$, $\beta = 3$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 3$이므로 $f(6) = \frac{15}{2}$

$k = 8$일 때, $\alpha = 2$, $\beta = 4$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 4$이므로 $f(6) = 6$

따라서 모든 $f(6)$의 값의 곱은 $\frac{15}{2} \times 6 = 45$

22. [출제의도] 항등식 이해하기

$a + 1 = 10$, $a = 9$

$b = 8$이므로 $a + b = 17$

23. [출제의도] 사차방정식의 근 계산하기

$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x-1)(x+1)(x-2) = 0$

양의 실근은 1, 2이므로

모든 양의 실근의 합은 $1 + 2 = 3$

24. [출제의도] 곱셈 공식 이해하기

$k^3 - \frac{27}{k^3} = \left(k - \frac{3}{k}\right)^3 + 3 \times k \times \frac{3}{k} \times \left(k - \frac{3}{k}\right)$

$= 216 + 54 = 270$

25. [출제의도] 음수의 제곱근 이해하기

a가 음수이므로 $a = -b$라 하면 $b > 0$

$\frac{\sqrt{4b}}{\sqrt{-b}\,\sqrt{-4}} - \frac{\sqrt{-32}\,\sqrt{-4b}}{\sqrt{2}\,\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{4b}}{\sqrt{b}\,i\,\sqrt{4}\,i} - \frac{\sqrt{32}\,i\,\sqrt{4b}\,i}{\sqrt{2}\,\sqrt{b}}$

$= -\frac{\sqrt{4b}}{\sqrt{b}\,\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{32}\,\sqrt{4b}}{\sqrt{2}\,\sqrt{b}}$

$= -1 + 8 = 7$

26. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

연립부등식의 해가 모든 실수이기 위해서는 두 부등식 $2x + 1 \le 2x + a$와 $2x + a \le x^2 - 2x + 24$의 해가 각각 모든 실수이어야 한다.

$2x + 1 \le 2x + a$의 해가 모든 실수가 되기 위해서는

$a \ge 1$ …… ㄱ

$2x + a \le x^2 - 2x + 24$, $x^2 - 4x + 24 - a \ge 0$

의 해가 모든 실수가 되기 위해서는

판별식 $D = 4^2 - 4(24 - a) \le 0$

$a \le 20$ …… ㄴ

ㄱ, ㄴ에 의하여 $1 \le a \le 20$이므로 a의 최댓값과 최솟값의 합은 21

27. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

ⅰ) 꼭짓점의 x좌표 a가 $-2 \le a \le 2$인 경우

ⅰ-1) $a = 1$일 때, $m = f(1) = 2b$,
$M = f(-2) = 9 + 2b$이므로
$2b \ge 5$, $9 + 2b \le 36$을 만족시키는 자연수 b의 개수는 11이다. ($b = 3$, 4, 5, $\cdots$, 13)

ⅰ-2) $a = 2$일 때, $m = f(2) = 2b$,
$M = f(-2) = 16 + 2b$이므로
$2b \ge 5$, $16 + 2b \le 36$을 만족시키는 자연수 b의 개수는 8이다. ($b = 3$, 4, 5, $\cdots$, 10)

ⅱ) 꼭짓점의 x좌표 a가 $a > 2$인 경우

ⅱ-1) $a = 3$일 때, $m = f(2) = 1 + 2b$,
$M = f(-2) = 25 + 2b$이므로
$1 + 2b \ge 5$, $25 + 2b \le 36$을 만족시키는 자연수 b의 개수는 4이다. ($b = 2$, 3, 4, 5)

ⅱ-2) $a \ge 4$일 때, 조건을 만족시키는 자연수 b가 없다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 모든 순서쌍의 개수는 23

28. [출제의도] 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

$P(x) = x^2 + ax + b$ (a, b는 상수)라 하자.

$\{P(x)\}^2 = (x+1)(x-5)Q(x) + 36$이므로

$P(-1) = \pm 6$ 또는 $P(5) = \pm 6$이다.

$P(0) \ne P(4)$이므로

이차함수 $y = P(x)$의 그래프에서 꼭짓점의 x좌표가 2가 될 수 없다.

그러므로 $P(-1) \ne P(5)$이다.

ⅰ) $P(-1) = 6$, $P(5) = -6$인 경우

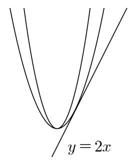
$P(-1)=1-a+b=6$, $a-b=-5$ …… ㉠
$P(5)=25+5a+b=-6$, $5a+b=-31$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-6$, $b=-1$ 이므로
$P(x)=x^2-6x-1$
$(x^2-6x-1)^2-6^2=(x^2-6x+5)(x^2-6x-7)$
$=(x-5)(x-1)(x-7)(x+1)$
$Q(x)=(x-1)(x-7)=x^2-8x+7$ 이다.
그러므로 $Q(-1)=16$
ii) $P(-1)=-6$, $P(5)=6$ 인 경우
$P(-1)=1-a+b=-6$, $a-b=7$ …… ㉢
$P(5)=25+5a+b=6$, $5a+b=-19$ …… ㉣
㉢, ㉣에서 $a=-2$, $b=-9$ 이므로
$P(x)=x^2-2x-9$
$(x^2-2x-9)^2-6^2=(x^2-2x-3)(x^2-2x-15)$
$=(x+1)(x-3)(x+3)(x-5)$
$Q(x)=(x-3)(x+3)=x^2-9$
그러므로 $Q(-1)=-8$
i), ii)에 의하여 모든 $Q(-1)$의 값의 합은
$16+(-8)=8$

29. [출제의도] 삼차방정식의 근 추론하기

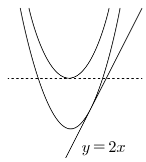
$f(x)=x^2+ax+b$ 라 하자.
i) γ가 1인 경우
$f(x)=0$ 의 두 근이 α, β 이다.
$\alpha+\beta$ 는 실수이므로 $(2\alpha+2\beta-\gamma)^2=-81$ 을
만족시키지 않는다.
ii) α 또는 β가 1인 경우
ii-1) $\alpha=1$ 일 때,
이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 모두 실수일 때,
$(2\alpha+2\beta-\gamma)^2=-81$ 을 만족시키지 않으므로
이차방정식 $f(x)=0$ 은 허근을 가진다.
근의 공식에 의하여 이차방정식 $f(x)=0$ 의 근은
$p+qi$ 또는 $p-qi$ (p, q는 실수)이다.
$\beta=p+qi$, $\gamma=p-qi$ 라 하면
$2\alpha+2\beta-\gamma=(2+p)+3qi$
$(2\alpha+2\beta-\gamma)^2=-81$ 이므로 $2\alpha+2\beta-\gamma$ 의
실수부분이 0이다.
그러므로 $p=-2$, $q=\pm 3$ 이고
$\beta=\overline{\gamma}$ 는 $-2+3i$, $-2-3i$ 중 하나이다.
ii-2) $\beta=1$ 일 때, ii-1)과 같은 방법으로
$\alpha=\overline{\gamma}$ 는 $-2+3i$, $-2-3i$ 중 하나이다.
따라서 $(4+\alpha)(4+\beta)(4+\gamma)$
$=5\times(2+3i)\times(2-3i)=5\times 13=65$

30. [출제의도] 이차함수 추론하기

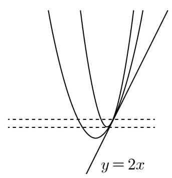
(가)에서
$4x^2-2\{f(x)+g(x)\}x+f(x)g(x)=0$
방정식 $\{2x-f(x)\}\{2x-g(x)\}=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로
㉠ 방정식 $2x=f(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1, 방정식 $2x=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 0인 경우
㉡ 방정식 $2x=f(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 0, 방정식 $2x=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우
㉢ 방정식 $2x=f(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1, 방정식 $2x=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1이고 그 실근이 같은 경우
중 하나이다.
(나)에서
$4k^2-2\{f(x)+g(x)\}k+f(x)g(x)=0$
방정식 $\{2k-f(x)\}\{2k-g(x)\}=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는
㉣ 직선 $y=2k$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와
㉤ 직선 $y=2k$ 와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점 중 위 ㉣이 아닌 교점의 개수
의 합과 같다.
모든 실수 x 에 대하여 $f(x)-g(x)\geq 0$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\geq g(x)$ 이다.
$f(x)=g(x)$ 가 x 에 대한 항등식인 경우는 (나)를 만족시키지 않으므로 함수의 그래프 위치 관계를 나타내는 그림은 다음과 같다.
i) $f(x)$ 의 최고차항의 계수와 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 모두 양수인 경우



[그림1]

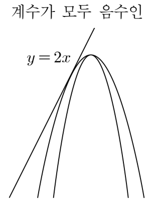


[그림2]

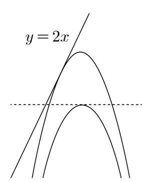


[그림3]

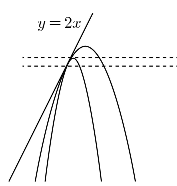
방정식 $4k^2-2\{f(x)+g(x)\}k+f(x)g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 k 의 개수가 2 이하이므로 조건을 만족시키지 않는다.
ii) $f(x)$ 의 최고차항의 계수와 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 모두 음수인 경우



[그림4]

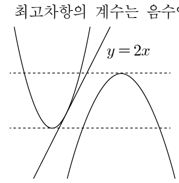


[그림5]

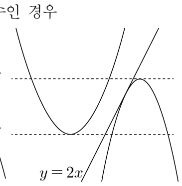


[그림6]

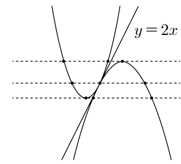
방정식 $4k^2-2\{f(x)+g(x)\}k+f(x)g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 k 의 개수가 2 이하이므로 조건을 만족시키지 않는다.
iii) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수, $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수인 경우



[그림7]

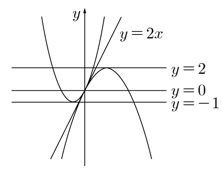


[그림8]



[그림9]

모든 조건을 만족시키는 그래프 개형은 [그림9]의 경우가 유일하다.



[그림9-1]

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에서 직선 $y=2x$ 와 접하고, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프도 원점에서 직선 $y=2x$ 에 접한다.
$f(0)=g(0)=0$ 이므로
$f(x)=ax^2+bx$ ($a>0$), $g(x)=cx^2+dx$ ($c<0$)
이라 하면
$ax^2+bx=2x$, $ax^2+(b-2)x=0$ 의
판별식 $D_1=(b-2)^2=0$ 이므로 $b=2$
$cx^2+dx=2x$, $cx^2+(d-2)x=0$ 의
판별식 $D_2=(d-2)^2=0$ 이므로 $d=2$
또한 함수 $f(x)=ax^2+2x=a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}$ 의
최솟값은 $-\frac{1}{a}=-1$ 이므로 $a=1$
함수 $g(x)=cx^2+2x=c\left(x+\frac{1}{c}\right)^2-\frac{1}{c}$ 의
최댓값은 $-\frac{1}{c}=2$ 이므로 $c=-\frac{1}{2}$
따라서 $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$
$f(10)+g(6)=120+(-6)=114$