2025학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	②	2	③	3	④	4	④	5	④
6	②	7	①	8	⑤	9	③	10	①
11	③	12	①	13	②	14	③	15	②
16	④	17	②	18	⑤	19	②	20	①
21	⑤	22	25	23	6	24	31	25	7
26	2	27	112	28	10	29	45	30	5

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\left(2^{\sqrt{2}+1}\right)^{-1}\times 2^{\sqrt{2}}=2^{(-\sqrt{2}-1+\sqrt{2})}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_5\frac{25}{2}+\log_5 10=\log_5\left(\frac{25}{2}\times 10\right)$

$=\log_5 125=\log_5 5^3=3$

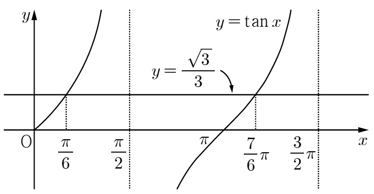
3. [출제의도] 부채꼴의 중심각의 크기 계산하기

부채꼴의 넓이를 S, 중심각의 크기를 θ, 반지름의 길이를 r이라 하면 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$에서

$\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 2^2\times\theta$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$이다.

4. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서 방정식 $\sqrt{3}\tan x=1$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표이다.



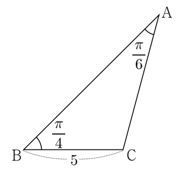
따라서 $x=\frac{7}{6}\pi$

5. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

수	…	3	4	5	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.6	…	.2122	.2148	.2175	…
1.7	…	.2380	.2405	.2430	…
1.8	…	.2625	.2648	.2672	…

$\log 0.183=\log\left(1.83\times 10^{-1}\right)=\log 1.83-1$
이고 상용로그표에서 $\log 1.83=0.2625$이므로
$\log 0.183=0.2625-1=-0.7375$이다.

6. [출제의도] 사인법칙 이해하기



$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$이므로 $\frac{5}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{\pi}{4}}$,

$\frac{5}{\frac{1}{2}}=\frac{\overline{AC}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$이다.

따라서 선분 AC의 길이는 $5\sqrt{2}$이다.

7. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$\frac{\cos\theta}{\tan\theta}+\sin\theta=\sqrt{3}$에서

$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}+\sin\theta=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta}=\sqrt{3}$

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\frac{1}{3}+\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{2}{3}$

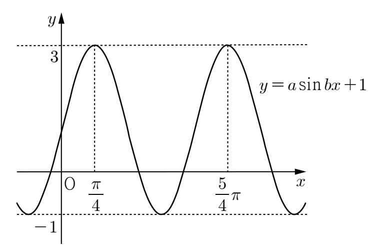
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이다.

따라서 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

8. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_{(-a^2-a+7)}x$에서 $-a^2-a+7>1$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.
$a^2+a-6<0$에서 $(a-2)(a+3)<0$이므로
$-3<a<2$이다.
따라서 $a=-2,\ -1,\ 0,\ 1$이므로 모든 정수 a의 값의 합은 -2이다.

9. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기



함수 $y=a\sin bx+1$의 최댓값이 3이고
최솟값이 -1이므로 $a=2$

주기가 $\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\pi$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$, $b=2$

따라서 $a+b=2+2=4$

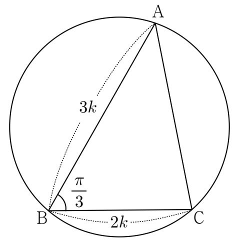
10. [출제의도] 지수함수의 역함수 이해하기

함수 $y=2^{-x+a}+a$의 역함수의 그래프가 점 $(a+1,\ 1)$을 지나므로 함수 $y=2^{-x+a}+a$의 그래프는 점 $(1,\ a+1)$을 지난다.
따라서 $a+1=2^{-1+a}+a$이고
$-1+a=0$이므로 $a=1$이다.

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y=2^{2x}-2^{x+2}+6$에서 $2^x=t$라 하면
$x\le 3$에서 $0<t\le 8$이고 $y=t^2-4t+6$이다.
$y=t^2-4t+6$
$\quad=(t-2)^2+2$
는 $t=2$일 때 최솟값은 2,
$t=8$일 때 최댓값은 38이다.
따라서 $2+38=40$

12. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙 이해하기



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 외접원의 넓이가 7π이므로 $R=\sqrt{7}$이다.
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R=2\sqrt{7}$

$\overline{AC}=2\sqrt{7}\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{21}$ ……㉠

$\overline{AB}:\overline{BC}=3:2$이므로
$\overline{AB}=3k\,(k>0)$이라 하면 $\overline{BC}=2k$이다.
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(3k)^2+(2k)^2-2\times 3k\times 2k\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=7k^2$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k^2=3$, $k=\sqrt{3}$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{9}{2}\sqrt{3}$

13. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 이차방정식 문제 해결하기

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$인 실수 t에 대하여 이차방정식
$5x^2+x+k=0$이 두 실근 $\sin t$, $\cos t$를 가지므로

$\sin t+\cos t=-\frac{1}{5}$, $\sin t\cos t=\frac{k}{5}$이다.

$(\sin t+\cos t)^2=\frac{1}{25}$

$\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t=\frac{1}{25}$

이고 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$이므로

$\sin t\cos t=-\frac{12}{25}$이다.

$\frac{k}{5}=-\frac{12}{25}$에서 $k=-\frac{12}{5}$이다.

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$에서 $\sin t>0$, $\cos t<0$이므로
이차방정식

$5x^2+x-\frac{12}{5}=0$,

$25x^2+5x-12=0$,
$(5x-3)(5x+4)=0$

의 두 실근은 $\sin t=\frac{3}{5}$, $\cos t=-\frac{4}{5}$이다.

$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$이다.

따라서 $k\times\tan t=\left(-\dfrac{12}{5}\right)\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{9}{5}$ 이다.

14. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

두 점 A, B가 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로

점 A의 y좌표는 $2^{\frac{1}{2}\log_2\frac{3}{2}}=2^{\log_2\sqrt{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

점 B의 y좌표는

$2^{\frac{5}{2}\log_2\frac{3}{2}}=2^{\log_2\frac{9}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}}=\dfrac{9}{4}\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{9}{8}\sqrt{6}$ 이다.

선분 AB의 중점이 M이므로 점 M의 y좌표는

$\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{9}{8}\sqrt{6}}{2}=\dfrac{13}{16}\sqrt{6}$ 이고 점 M의 x좌표는

$\dfrac{\frac{1}{2}\log_2\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\log_2\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{2}\log_2\dfrac{3}{2}$ 이다.

두 점 M, N의 x좌표는 서로 같으므로 점 N의 y좌표는

$2^{\frac{3}{2}\log_2\frac{3}{2}}=2^{\log_2\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{3}{4}\sqrt{6}$ 이다.

따라서 선분 MN의 길이는

$\dfrac{13}{16}\sqrt{6}-\dfrac{3}{4}\sqrt{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{16}$ 이다.

15. [출제의도] 로그의 정의를 활용하여 자연수의 값 추론하기

$\log_{|x+1|}\{(n-x)(n+1+x)\}$ 가 정의되려면

$|x+1|>0$, $|x+1|\neq 1$, $(n-x)(n+1+x)>0$

을 만족해야 한다.

$|x+1|>0$, $|x+1|\neq 1$에서 $x\neq -2,\ -1,\ 0$

$(n-x)(n+1+x)>0$에서 $-n-1<x<n$

(i) $n=1$일 때, $-2<x<1$이므로 정수 x의 개수는 0이다.

(ii) $n\geq 2$일 때, 정수 x의 개수는

($-n-1<x<n$에 포함되는 정수의 개수)-3

$=\{n-(-n-1)-1\}-3$

$2n-3=25$

따라서 $n=14$이다.

16. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 식의 값 추론하기

$f(x)=a\sin\dfrac{\pi}{b}x+a^2$은 $x=0$ 또는 $x=b$에서

최댓값 a^2을 가지고, $x=\dfrac{b}{2}$에서 최솟값 $a+a^2$을

가지므로 조건 (가)에 의하여

$a^2-(a+a^2)=-a=2$이다.

그러므로 $a=-2$이다.

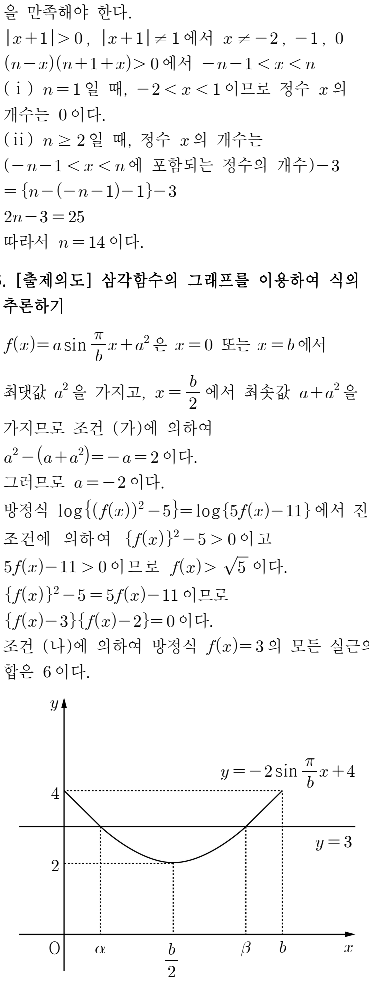
방정식 $\log\{(f(x))^2-5\}=\log\{5f(x)-11\}$에서 진수 조건에 의하여 $\{f(x)\}^2-5>0$이고

$5f(x)-11>0$이므로 $f(x)>\sqrt{5}$ 이다.

$\{f(x)\}^2-5=5f(x)-11$이므로

$\{f(x)-3\}\{f(x)-2\}=0$이다.

조건 (나)에 의하여 방정식 $f(x)=3$의 모든 실근의 합은 6이다.



함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=\dfrac{b}{2}$에 대하여 대칭이고 방정식 $f(x)=3$은 서로 다른 두 실근 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$를 가진다.

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{b}{2}$ 이므로 $\dfrac{b}{2}=\dfrac{6}{2}=3$에서 $b=6$이다.

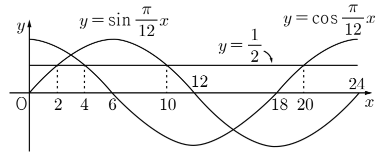
따라서 $a+b=-2+6=4$

17. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 부등식 문제 해결하기

부등식 $\left(\sin\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}\right)<0$의 해는

$\sin\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}>0$, $\cos\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}<0$ 또는

$\sin\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}<0$, $\cos\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}>0$이다.



(i) $\sin\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}>0$, $\cos\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}<0$일 때,

$\sin\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}>0$에서

$\sin\dfrac{\pi}{12}x>\dfrac{1}{2}$ 이므로 $2<x<10$ ······㉠

$\cos\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}<0$에서

$\cos\dfrac{\pi}{12}x<\dfrac{1}{2}$ 이므로 $4<x<20$ ······㉡

㉠과 ㉡의 공통부분은 $4<x<10$이므로 정수 x의 개수는 5이다.

(ii) $\sin\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}<0$, $\cos\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}>0$일 때,

$\sin\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}<0$에서

$\sin\dfrac{\pi}{12}x<\dfrac{1}{2}$ 이므로

$0\leq x<2$ 또는 $10<x<24$ ······㉢

$\cos\dfrac{\pi}{12}x-\dfrac{1}{2}>0$에서

$\cos\dfrac{\pi}{12}x>\dfrac{1}{2}$ 이므로

$0\leq x<4$ 또는 $20<x<24$ ······㉣

㉢과 ㉣의 공통부분은 $0\leq x<2$ 또는 $20<x<24$이므로 정수 x의 개수는 5이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 10이다.

18. [출제의도] 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 도형의 넓이 문제 해결하기

$f(x)=a^{ax}$, $g(x)=\dfrac{1}{a}\log_a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)-\dfrac{1}{a}$ 이라 하자.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 역함수의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{a}$ 만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{1}{a}$ 만큼 평행이동한 그래프이다. 점 C의 좌표가 $\left(a+\dfrac{1}{a},\ 0\right)$이므로

점 D의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{a},\ a\right)$이다. 점 A의 x좌표와 점 D의 x좌표의 차가 $\dfrac{1}{a}$ 이므로 점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{2}{a},\ a^2\right)$이다.

직선 AD의 방정식은 $y=(a^3-a^2)\left(x-\dfrac{2}{a}\right)+a^2$이고 직선 AD가 원점을 지나므로

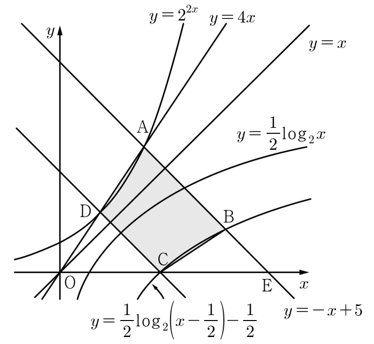
$0=(a^3-a^2)\left(0-\dfrac{2}{a}\right)+a^2$, $2(a^2-a)=a^2$,

$a^2-2a=0$이다.

$a>1$이므로 $a=2$이다.

그러므로 점 A의 좌표는 $(1,\ 4)$, 점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$, 점 D의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$이다. 점 B는 점 A를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$ 만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 점이므로 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{9}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이다.

두 점 A, B를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 E라 하자. 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y=-x+5$이므로 점 E의 좌표는 $(5,\ 0)$이다.



삼각형 AOE의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 5\times 4=10$,

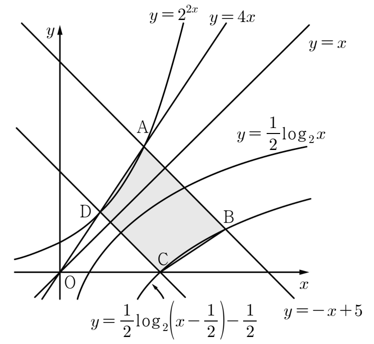
삼각형 DOC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times 2=\dfrac{5}{2}$,

삼각형 BCE의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{8}$ 이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 AOE의 넓이에서 삼각형 DOC의 넓이와 삼각형 BCE의 넓이를 뺀 값이므로

(사각형 ABCD의 넓이)$=10-\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{8}=\dfrac{55}{8}$

[다른 풀이]



선분 AB와 선분 DC가 평행하므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.

직선 AB와 직선 DC의 기울기가 각각 -1이므로

$\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{2}\times\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}$ 이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\times\left(\dfrac{9}{2}-1\right)=\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$ 이다.

점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y=-(x-1)+4$이므로 점 $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$에서 직선 $y=-(x-1)+4$ 즉 $x+y-5=0$까지의 거리는

$\dfrac{\left|\frac{1}{2}+2-5\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$ 이다.

따라서 사각형 ABCD 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\text{높이})\times(\overline{\text{AB}}+\overline{\text{DC}})$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{4}\sqrt{2}\times\left(2\sqrt{2}+\dfrac{7}{2}\sqrt{2}\right)=\dfrac{55}{8}$

19. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 자연수의 순서쌍의 개수 구하는 문제 해결하기

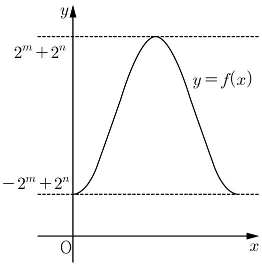
$\{f(x)\}^2-(2^5+2^4)f(x)+2^9$

$=(f(x)-2^5)(f(x)-2^4)=0$ 이므로

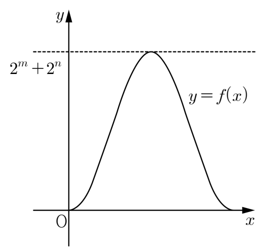
$f(x)=2^5$, $f(x)=2^4$ 이다.

방정식 $\{f(x)\}^2-(2^5+2^4)f(x)+2^9=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 직선 $y=2^4$, $y=2^5$ 과 각각 만나는 점의 개수의 합과 같다.

(i) $m<n$일 때

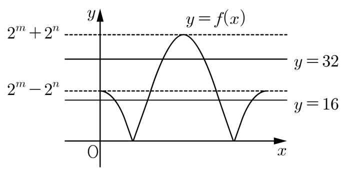


(ii) $m=n$일 때



(i)과 (ii)에서 실근의 개수가 최대 4이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $m>n$일 때



서로 다른 실근의 개수가 6이 되려면

$16\le 2^m-2^n<32$, $2^m+2^n>32$ 이므로

$2^n+16\le 2^m<2^n+32$ 이고 $2^m>32-2^n$ 이다.

① $n=1$ 이면 $30<2^m<34$ 이므로 $m=5$ 이다.

② $n=2$ 이면 $28<2^m<36$ 이므로 $m=5$ 이다.

③ $n=3$ 이면 $24<2^m<40$ 이므로 $m=5$ 이다.

④ $n=4$ 이면 $32\le 2^m<48$ 이므로 $m=5$ 이다.

⑤ $n=5$ 이면 $48\le 2^m<64$ 이므로 부등식을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

⑥ $n=6$ 이면 $80\le 2^m<96$ 이므로 부등식을 만족시키는 자연수 m 은 존재하지 않는다.

따라서 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는 4 이다.

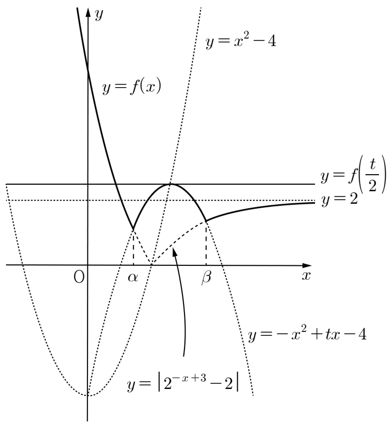
20. [출제의도] 이차함수와 지수함수의 그래프를 이용하여 최솟값 구하는 문제 해결하기

함수 $h(x)$ 를 $h(x)=-x^2+tx-4$ 라 할 때,

$h(x)=-\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{t^2}{4}-4$ 이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4}-4\right)$ 이다.

함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 꼭짓점은 함수 $y=x^2-4\ (x>2)$의 그래프 위에 존재한다.

$t>4$ 일 때, 두 함수 $y=\left|2^{-x+3}-2\right|$, $y=h(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표가 방정식 $\left|2^{-x+3}-2\right|=-x^2+tx-4$ 의 서로 다른 두 실근 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$이다.



$f\left(\dfrac{t}{2}\right)=h\left(\dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{t^2}{4}-4$ 이고 $t>4$ 이므로

$f\left(\dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{t^2}{4}-4>0$ 이다.

x 에 대한 방정식 $f(x)=f\left(\dfrac{t}{2}\right)$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

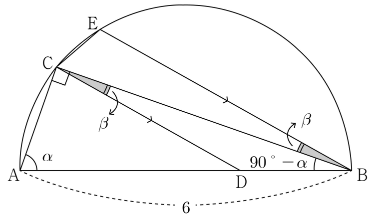
$0<f\left(\dfrac{t}{2}\right)<2$ 일 때, $g(t)=3$ 이다.

$f\left(\dfrac{t}{2}\right)\ge 2$ 일 때, $g(t)=2$ 이다.

$f\left(\dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{t^2}{4}-4\ge 2$

따라서 $t\ge 2\sqrt{6}$ 이므로 $g(t)=2$ 인 t 의 최솟값은 $2\sqrt{6}$ 이다.

21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 선분의 길이 구하는 문제 해결하기



$\overline{\text{AC}}=\overline{\text{DB}}=x$, $\angle\text{CAB}=\alpha$ 라 하자.

삼각형 ABC 에서 $\angle\text{ACB}=90^\circ$ 이므로

$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}=\dfrac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{AB}}}=\dfrac{x}{6}$, $x=2$

그러므로 $\overline{\text{AC}}=\overline{\text{DB}}=2$ 이고 $\overline{\text{AD}}=4$

삼각형 ADC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\text{CD}}^2=4^2+2^2-2\times4\times2\times\cos\alpha=\dfrac{44}{3}$

$\overline{\text{CD}}=\sqrt{\dfrac{44}{3}}=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$

$\angle\text{CBE}=\beta$ 라 하자. 선분 BE 와 선분 CD 가 평행하므로

$\angle\text{DCB}=\angle\text{CBE}=\beta$

$\angle\text{DBC}=90^\circ-\alpha$ 이므로

삼각형 DBC 에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\text{DB}}}{\sin(\angle\text{DCB})}=\dfrac{\overline{\text{CD}}}{\sin(\angle\text{DBC})}$

$\dfrac{2}{\sin\beta}=\dfrac{\frac{2\sqrt{33}}{3}}{\sin(90^\circ-\alpha)}$

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ 이므로

$\sin\beta=\dfrac{2\times\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{33}}{3}}=\dfrac{\sqrt{33}}{33}$

삼각형 CBE 의 외접원의 지름이 6 이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\text{CE}}}{\sin(\angle\text{CBE})}=6$

따라서 $\overline{\text{CE}}=6\times\sin\beta=6\times\dfrac{\sqrt{33}}{33}=\dfrac{2}{11}\sqrt{33}$

22. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$\sqrt[6]{25^2}\times\sqrt[3]{5^4}=5^{\frac{4}{6}}\times5^{\frac{4}{3}}=5^{\frac{4}{6}+\frac{4}{3}}=5^2=25$

23. [출제의도] 지수함수가 포함된 방정식의 해 계산하기

$3^{4-x}=(3^2)^{x-7}=3^{2(x-7)}$ 에서 $4-x=2(x-7)$

따라서 $3x=18$ 이므로 $x=6$

24. [출제의도] 로그함수가 포함된 부등식의 해 계산하기

$\log_2(x-1)<\log_2 2^5$ 이고

$y=\log_2(x-1)$ 은 x 의 값이 증가할 때

y 의 값이 증가하므로 $x-1<32$ 이다.

그러므로 $x<33$ 이고 로그의 정의에서

$x-1>0$ 이므로 $x>1$ 이다.

따라서 $1<x<33$ 이므로 자연수 x 의 개수는 31 이다.

25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=6\cos ax+10$ 에서 주기가 $\dfrac{2\pi}{a}$ 이므로

$\dfrac{2\pi}{a}=4\pi$, $a=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{4}{3}\pi\right)&=6\cos\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\right)+10\\&=6\cos\frac{2}{3}\pi+10\\&=6\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+10\\&=-6\cos\frac{\pi}{3}+10\\&=-6\times\frac{1}{2}+10\\&=7\end{aligned}$$

26. [출제의도] 삼각함수의 정의 이해하기

점 $\text{A}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}},\ \dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은

$\text{B}\left(\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)$ 이다.

$\overline{\text{OA}}=\overline{\text{OB}}=1$ 이므로 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$,

$\sin\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ 이다.

따라서 $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{k^2+1}=\dfrac{1}{3}$ 에서 $k^2=2$ 이다.

27. [출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이용하여 자연수의 합 추론하기

자연수 m 의 양의 제곱근은 $m^{\frac{1}{2}}$ 이고 자연수 n 의 양의 네제곱근은 $n^{\frac{1}{4}}$ 이다. 조건 (가)에서

$m^{\frac{1}{2}}=2\times n^{\frac{1}{4}}$

$m=4\sqrt{n}$ ······㉠

㉠에 의하여

$\frac{3m}{n}=\frac{12\sqrt{n}}{n}=\frac{12}{\sqrt{n}}$ ······㉡

이고 조건 (나)에서

$\frac{3m}{n}$은 자연수이므로 ㉡에 의하여 $\sqrt{n}$은 12의 약수이다.

$\sqrt{n}$은 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로

n은 1, 4, 9, 16, 36, 144이고

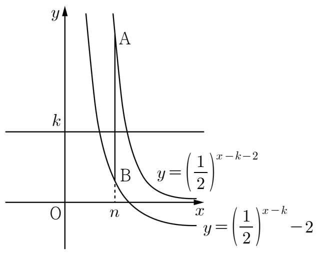
㉠에서 m은 4, 8, 12, 16, 24, 48이다.

따라서 조건을 만족시키는

모든 자연수 m의 값의 합은

$4+8+12+16+24+48=112$이다.

28. [출제의도] 지수함수의 그래프와 지수로그 부등식을 이용하여 자연수 추론하기



자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 곡선

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-k-2}$과 만나는 점이 A이므로 점 A의

y좌표는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-2}=2^{k+2-n}$이고,

직선 $x=n$이 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-k}-2$와 만나는 점이

B이므로 점 B의 y좌표는

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}-2=2^{k-n}-2$이다.

선분 AB가 직선 $y=k$와 만나기 위해서는 자연수 k에 대하여 자연수 n이 부등식

$2^{k-n}-2\le k\le 2^{k+2-n}$

$k-n\le\log_2(k+2)$이고 $\log_2 k\le k+2-n$

$k-\log_2(k+2)\le n\le k+2-\log_2 k$

를 만족시켜야 한다. $f(k)$는 선분 AB가 직선 $y=k$와 만나도록 하는 자연수 n의 최댓값과 최솟값의 합이다.

(ⅰ) $k=1$이면 $1\le n\le 3$이므로 $f(1)=1+3=4$

(ⅱ) $k=2$이면 $1\le n\le 3$이므로 $f(2)=1+3=4$

(ⅲ) $k=3$이면 $1\le n\le 3$이므로 $f(3)=1+3=4$

(ⅳ) $k=4$이면 $2\le n\le 4$이므로 $f(4)=2+4=6$

(ⅴ) $k=5$이면 $3\le n\le 4$이므로 $f(5)=3+4=7$

(ⅵ) $6\le k\le 8$이면 $k-3\le n\le(k+2)-3$이므로 $f(k)=2k-4$이다. $2k-4=15$를 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않는다.

(ⅶ) $9\le k\le 13$이면 $k-3\le n\le(k+2)-4$이므로 $f(k)=2k-5$이다. $2k-5=15$를 만족시키는 자연수 k는 10이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 값은 10이다.

[참고]

(ⅰ) $m\ge 3$인 자연수 m에 대하여

$2^m-2\le k\le 2^m$이면

$k-m\le n\le(k+2)-m$이므로

$f(k)=2k-2m+2$

(ⅱ) $m\ge 3$인 자연수 m에 대하여

$2^m+1\le k\le 2^{m+1}-3$이면

$k-m\le n\le(k+2)-(m+1)$이므로

$f(k)=2k-2m+1$

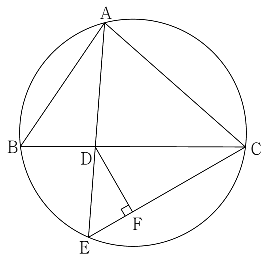
※ 자연수 k에 대하여 부등식

$$k-\log_2(k+2)\le n\le k+2-\log_2 k$$

를 만족시키는 자연수 n의 값을 찾아 표로 정리하면 다음과 같다.

k	$k-\log_2(k+2)$	n	$k+2-\log_2 k$
1	$-0.***$	1, 2, 3	3
2	0	1, 2, 3	3
3	0.***	1, 2, 3	3.***
4	1.***	2, 3, 4	4
5	2.***	3, 4	4.***
6	3	3, 4, 5	5.***
7	3.***	4, 5, 6	6.***
8	4.***	5, 6, 7	7
9	5.***	6, 7	7.***
10	6.***	7, 8	8.***
11	7.***	8, 9	9.***
12	8.***	9, 10	10.***
13	9.***	10, 11	11.***
14	10	10, 11, 12	12.***
15	10.***	11, 12, 13	13.***
16	11.***	12, 13, 14	14
17	12.***	13, 14	14.***
18	13.***	14, 15	15.***
19	14.***	15, 16	16.***
20	15.***	16, 17	17.***

29. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 도형 문제 해결하기



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}=36$

$\overline{BC}=6$

점 D가 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=2$, $\overline{DC}=4$

$\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{6^2+4^2-5^2}{2\times6\times4}=\frac{9}{16}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos\theta=11$이므로

$\overline{AD}=\sqrt{11}$이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle BAD)=\frac{16+11-4}{2\times4\times\sqrt{11}}=\frac{23}{8\sqrt{11}}$

호 BE에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle BAD=\angle BCF$이다.

$\overline{FC}=\overline{DC}\times\cos(\angle BCF)=\overline{DC}\times\cos(\angle BAD)$

$=4\times\frac{23}{8\sqrt{11}}=\frac{23}{22}\sqrt{11}$

따라서 $p=22$, $q=23$이므로 $p+q=45$이다.

30. [출제의도] 로그함수가 포함된 부등식을 이용하여 정수의 합을 구하는 문제 해결하기

조건 (가)에서 로그의 진수 조건을 만족시켜야 하므로

$|k|-1>0$에서 $|k|>1$이다.

$k>1$ 또는 $k<-1$이다.

(ⅰ) $k>1$이면 $2^k>1$이므로 조건 (가)에서

$k-1\le 8$이므로 $1<k\le 9$이다.

조건 (나)에서 로그의 진수 조건을 만족시켜야 하므로

$(x-1)(k-x+1)>0$, $x>0$이다. 그러므로

$1<x<1+k$이다.

$\log_{2^k}\{(x-1)(k-x+1)\}\le\log_{2^k}4x$에서

$-x^2+2x+kx-k-1\le 4x$

$x^2+(2-k)x+1+k\ge 0$ ······㉠

방정식 $x^2+(2-k)x+1+k=0$의

판별식을 D라 하면 $D=k(k-8)$에 대하여

① $k\le 8$이면 $D\le 0$이므로 모든 실수 x가 부등식 ㉠을 만족시키고, x의 범위는

진수 조건 $1<x<1+k$와 같다. 따라서 $k=7$이면 자연수 x의 개수는 6이므로 조건을 만족시킨다.

② $k>8$이면 $1<k\le 9$이므로 $k=9$이다.

$k=9$이면 x의 범위는 $1<x\le 2$ 또는

$5\le x<10$이 되어 만족시키는 자연수 x는 2, 5, 6, 7, 8, 9이고, 자연수 x의 개수는 6이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $k<-1$이면 $0<2^k<1$이므로 조건 (가)에서

$-1-k\ge 8$에서 $k\le -9$이다.

조건 (나)의 진수 조건에서 $(x-1)(x-1+k)<0$,

$x>0$이다. 그러므로 $1<x<1-k$이다.

조건 (나)에서 $x=2$를 대입한 결과가 조건 (가)이므로

자연수 2는 부등식

$\log_{2^k}\{f(x)-k(x-1)\}\le\log_{2^k}4x$를 만족시킨다.

조건 (나)의 부등식에서

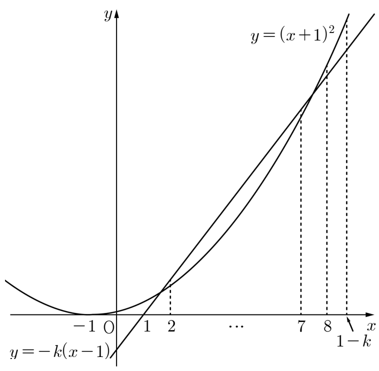
$-x^2+2x-1-k(x-1)\ge 4x$이므로

$(x+1)^2\le -k(x-1)$이다. 방정식

$(x+1)^2=-k(x-1)$의 판별식을 D라 하면

$k\le -9$에서 $D>0$이므로 $y=(x+1)^2$의 그래프와

$y=-k(x-1)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.



$1<x<1-k$에서 부등식 $(x+1)^2\le -k(x-1)$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 6이므로 $k\le -9$에서

부등식 $(x+1)^2\le -k(x-1)$을 만족시키는 자연수 x는 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.

$(7+1)^2\le -k(7-1)$이고 $(8+1)^2>-k(8-1)$이다.

그러므로 $-\frac{81}{7}<k\le -\frac{32}{3}$이므로 $k=-11$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 서로 다른 모든 정수 k의 값의 합은 $-11+7+9=5$이다.