2026학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2025. 6. 5.(목)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ②	02. ①	03. ③	04. ③	05. ②
06. ④	07. ⑤	08. ⑤	09. ②	10. ①
11. ⑤	12. ②	13. ④	14. ②	15. ①
16. 2	17. 6	18. 133	19. 8	
20. 85	21. 42	22. 38		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$4^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{2\times\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$
$$=2^1$$
$$=2$$

정답 ②

2. **출제의도** : 미분계수를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x-1$ 에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$
$$=2\times 1-1$$
$$=1$$

정답 ①

3. **출제의도** : 시그마의 정의를 이용하여 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{7}a_k=8$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{7}(2a_k+1)=2\sum_{k=1}^{7}a_k+\sum_{k=1}^{7}1$$
$$=2\times 8+1\times 7$$
$$=23$$

정답 ③

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=-x^2+a$와 함수 $y=5x-a$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}(-x^2+a)$$
$$=-9+a$$
$$\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3+}(5x-a)$$
$$=15-a$$

$f(3)=15-a$

이므로

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3+}f(x)=f(3)$$

에서

$-9+a=15-a$

따라서

$a=12$

정답 ③

5. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

$$\int_{0}^{2}(6x^2-2x+1)dx=\left[2x^3-x^2+x\right]_0^2$$
$$=14-0$$
$$=14$$

정답 ②

6. **출제의도** : 삼각함수의 그래프의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$의 최댓값이 8이고

$a>0$이므로

$a+1=8$에서

$a=7$

함수 $f(x)$의 주기가 π이고

$b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$에서

$b=2$

따라서

$a+b=7+2=9$

정답 ④

7. **출제의도** : 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=5x^2+xf(x)$

이므로

$g'(x)=10x+f(x)+xf'(x)$

따라서

$$g'(3)=30+f(3)+3\times f'(3)$$
$$=30+2+3\times1$$
$$=35$$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 삼각함수의 성질과 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(\pi-\theta)>0$에서 $\sin\theta>0$

$2\cos\theta=\sin\theta$ …… ㉠

㉠에서 $\sin\theta>0$이므로 $\cos\theta>0$

㉠의 양변을 제곱하면

$4\cos^2\theta=\sin^2\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$이므로 이를 위 등식에 대입하면

$4\cos^2\theta=1-\cos^2\theta$

$5\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

따라서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

정답 ⑤

9. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 주어진 식을 만족시키는 함수의 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx=36+\int_{-3}^{3}f(x)dx$$

에서

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}\{xf(x)+f(x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{3}xf(x)dx+\int_{-3}^{3}f(x)dx$$

이므로

$$\int_{-3}^{3} xf(x)dx=36$$

이때 $f(x)=x^2+ax$이므로

$$\int_{-3}^{3} xf(x)dx=\int_{-3}^{3} x(x^2+ax)dx$$

$$=\int_{-3}^{3}(x^3+ax^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{3} ax^2dx$$

$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^3$$

$$=2\times 9a$$

$$=18a$$

따라서

$18a=36$

이므로

$a=2$

정답 ②

10. **출제의도** : 로그의 성질과 로그방정식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=\log_a(x+3)$이

곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점 A의 좌표를 구해 보자

$\log_a(x+3)=\log_a(-x+3)$에서

$x+3=-x+3$

$x=0$

$x=0$일 때, $y=\log_a 3$이므로

점 A의 좌표는 $(0,\ \log_a 3)$이다.

곡선 $y=\log_a(x+3)$에서

$y=0$일 때

$\log_a(x+3)=0$

$x+3=1$

$x=-2$

그러므로 점 B의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다.

곡선 $y=\log_a(-x+3)$에서

$y=0$일 때

$\log_a(-x+3)=0$에서

$-x+3=1$

$x=2$

그러므로 점 C의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

원점을 O라 하면

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OB}}}$에서

$$\sqrt{3}=\frac{\log_a 3}{2}$$

$\log_a 3=2\sqrt{3}$

$a^{2\sqrt{3}}=3$

따라서

$$a=3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}=3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

정답 ①

11. **출제의도** : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $x=t^3-t^2-t+1$에 $t=1$을 대입하면

$x=1^3-1^2-1+1=0$ (거짓)

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t-1$$

이므로 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는

$v=3\times1^2-2\times1-1=0$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 0이고 시각 $t=1$의 좌우에서 속도 v의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=1$이다. 점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-2$

이므로 시각 $t=1$일 때 점 P의 가속도는

$a=6\times1-2=4$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

12. **출제의도** : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 특정한 항의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$a_{n+1}=a_n-3$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$

조건 (가)에서 $a_3=a_1$ …… ㉠

(ⅰ) $a_3=a_2-3$, $a_2=a_1-3$인 경우

$a_3=a_2-3=(a_1-3)-3$

$a_3=a_1-6$

이 식은 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_3=a_2-3$, $a_2=2a_1$인 경우

$a_3=a_2-3=2a_1-3$

㉠에서

$a_3=2a_3-3$

$a_3=3$

$a_4=a_3-3=0$ 또는 $a_4=2a_3=6$

(ⅲ) $a_3=2a_2$, $a_2=a_1-3$인 경우

$a_3=2(a_1-3)=2a_1-6$

㉠에서

$a_3=2a_3-6$

$a_3=6$

$a_4=a_3-3=3$ 또는 $a_4=2a_3=12$

(ⅳ) $a_3=2a_2$, $a_2=2a_1$인 경우

$a_3=2a_2=2(2a_1)=4a_1$

㉠에서 $a_3=4a_3$

$a_3=0$

$a_4=a_3-3=-3$ 또는 $a_4=2a_3=0$

(ⅰ) ~ (ⅳ)에서

$a_4=-3$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=3$ 또는 $a_4=6$ 또는 $a_4=12$

이므로

a_4의 최댓값은 12

정답 ②

13. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수 k의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에서

(A의 넓이)+(C의 넓이)=(B의 넓이)

가 성립해야 하므로

$$\int_0^k\left\{(3x^2-7x+2)-\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)\right\}dx=0$$

$$\int_0^k\left(3x^2-\frac{22}{3}x+\frac{8}{3}\right)dx=0$$

$$\left[x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^k=0$$

$$k^3-\frac{11}{3}k^2+\frac{8}{3}k=0$$

$3k^3-11k^2+8k=0$

$k(k-1)(3k-8)=0$

이때 $k>2$ 이므로 $k=\frac{8}{3}$

정답 ④

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)}=\frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle APQ)}$$

조건에서 $\overline{AQ}=3\sqrt{2}$이고

$\sin(\angle QAP):\sin(\angle APQ)=\sqrt{2}:3$이므로

$$\overline{PQ}$$
$$=\frac{\sin(\angle QAP)}{\sin(\angle APQ)}\times\overline{AQ}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\times3\sqrt{2}$$
$$=2$$

점 P는 선분 BC의 중점이고 점 Q는 선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점이므로

$$\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PQ}+\overline{QC}$$
$$=\frac{1}{2}\overline{BC}+2+\frac{1}{6}\overline{BC}$$
$$=\frac{2}{3}\overline{BC}+2$$
$$\frac{1}{3}\overline{BC}=2,\ \overline{BC}=6$$

한편, $\overline{BQ}=\frac{5}{6}\overline{BC}=5$이고 $\overline{AB}=2\sqrt{7}$이므로 삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABQ)=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2-\overline{AQ}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BQ}}$$
$$=\frac{(2\sqrt{7})^2+5^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{7}\times5}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2$$
$$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$$
$$=(2\sqrt{7})^2+6^2-2\times2\sqrt{7}\times6\times\frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$=22$$

이므로

$$\overline{AC}=\sqrt{22}$$

이때

$$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ABC)}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{3}{4}$$

이므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=2R$$

이므로

$$R=\frac{\sqrt{22}}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt{22}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{22}}{3}\right)^2=\frac{88}{9}\pi$$

정답 ②

15. 출제의도 : 미분을 이용하여 상수와 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$(a, b, c, d는 상

수, $a\neq 0$)이라 하자

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=c$이므로

$c=6$

$f'(x)=3ax^2+2bx+6$ …… ㉠

$x\neq -1$, $x\neq 1$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$는 미분가능하고

$x<-1$ 또는 $x>1$에서 $g'(x)=f'(x)$,

$-1<x<1$에서

$g'(x)=-f'(x)$ …… ㉡

이다.

조건 (가)에서 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하므로

$a\neq -1$, $a\neq 1$에서

$$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=g'(a)$$

모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

의 값이 0 이하이므로

㉡에서 함수 $f(x)$는

$x<-1$ 또는 $x>1$에서 $f'(x)\leq 0$

$-1<x<1$에서 $f'(x)\geq 0$

을 만족시킨다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 모두 극값을 가지므로

$f'(-1)=f'(1)=0$이어야 한다.

㉠에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+6=3a(x+1)(x-1)$

$3ax^2+2bx+6=3ax^2-3a$

양변의 일차항 계수와 상수항을 비교하면

$2b=0$에서 $b=0$

$6=-3a$에서 $a=-2$

$f(x)=-2x^3+6x+d$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

의 값이 존재하고

$x\to 1+$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1)$ …… ㉢

$\lim_{x\to 1+}\{f(x)+k\}=-f(1)$

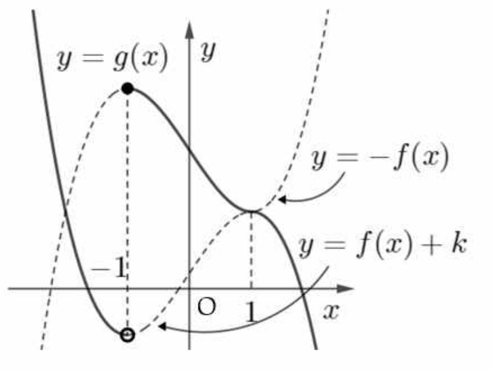
$f(1)+k=-f(1)$이므로

$f(1)=-\frac{k}{2}$ …… ㉣

한편 $\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}\{-f(x)\}$

$=-f(1)=g(1)$

이고 ㉢에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



조건 (나)에서

방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값이 13이므로

$g(-1)=-f(-1)=13$

$f(-1)=2-6+d=-13$이므로

$d=-9$

$f(x)=-2x^3+6x-9$

㉣에서

$f(1)=-2+6-9=-\frac{k}{2}$

$k=10$

따라서

$$k+f\left(\frac{1}{2}\right)=10+\left(-\frac{1}{4}+3-9\right)$$
$$=\frac{15}{4}$$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그에 미지수가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$ …… ㉠

진수 조건에 의해

$x+1>0$, $x-1>0$이므로 $x>1$

㉠에서

$\log_5(x+1)(x-1)=\log_{5^2}3^2$

$\log_5(x^2-1)=\log_5 3$

즉, $x^2-1=3$에서 $x^2=4$

따라서 $x>1$이므로

$x=2$

정답 2

17. 출제의도 : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+4x$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(3x^2+4x)dx$$
$$=x^3+2x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=3$이므로

$C=3$

따라서

$f(x)=x^3+2x^2+3$

이므로

$f(1)=1+2+3=6$

정답 6

18. 출제의도 : $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{6}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{6}k^2+2\sum_{k=1}^{6}k$$
$$=\frac{6\times7\times13}{6}+2\times\frac{6\times7}{2}$$
$$=91+42$$
$$=133$$

정답 133

19. 출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=a$이므로

$a=20$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

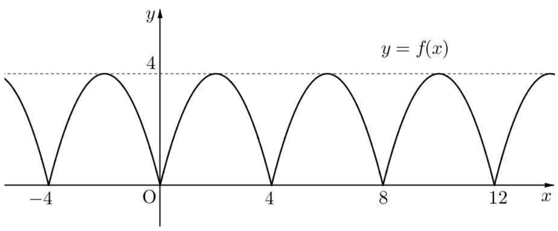
$f(2)=24-36+20=8$

정답 8

20. **출제의도** : 주기함수를 이해하고 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \le x < 4$일 때 $f(x) = -x^2 + 4x$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x) = x$에서

$-x^2 + 4x = x$

$-x(x-3) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 3$

방정식 $f(x) = x$의 모든 실근이 0, 3이므로 방정식 $f(f(x)) = f(x)$의 실근을 구하는 것은 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$의 실근을 구하는 것과 같다.

$0 \le x < 4$일 때,

$f(x) = 0$에서 $x = 0$

$f(x) = 3$에서 $-x^2 + 4x = 3$

$-(x-1)(x-3) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = 3$

그러므로 $0 \le x < 4$일 때, 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$의 모든 실근은 0, $\boxed{1}$, 3이므로

$$a_1 = 0,\ a_2 = \boxed{1},\ a_3 = 3$$

이다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이므로 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 각각 0, $\boxed{1}$, 3이고, 공차가 모두 $\boxed{4}$인 등차수열이다.

따라서

$a_{20} = a_{3\times7-1} = 1 + 6\times4 = 25$,

$a_{21} = a_{3\times7} = 3 + 6\times4 = 27$,

$a_{22} = a_{3\times8-2} = 0 + 7\times4 = 28$

이므로

$a_{20} + a_{21} + a_{22} = 25 + 27 + 28 = \boxed{80}$이다.

이때 $p = 1$, $q = 4$, $r = 80$이므로

$p + q + r = 85$

정답 85

21. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = (x-1)(x-2)$

(i) $a < 1$ 또는 $a > 2$일 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)\times f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

(ii) $1 < a < 2$일 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)} = -\lim_{x\to a} g(x) = -g(a)$$

(iii) $a = 1$일 때,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)} = \lim_{x\to 1-}\frac{g(x)\times f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 1-} g(x) = g(1),$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)}$$
$$=-\lim_{x\to1+}g(x)$$
$$=-g(1)$$
$a=1$에서 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 극한값이 존재해야 하므로
$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
이어야 한다.
즉, $g(1)=-g(1)$이므로
$g(1)=0$ …… ㉠

(iv) $a=2$일 때,
$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times(-f(x))}{f(x)}$$
$$=-\lim_{x\to2-}g(x)$$
$$=-g(2),$$
$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times f(x)}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to2+}g(x)$$
$$=g(2)$$
$a=2$에서 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 극한값이 존재해야 하므로
$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
이어야 한다.
즉, $-g(2)=g(2)$이므로
$g(2)=0$ …… ㉡

(i) ~ (iv)에서
모든 실수 a에 대하여
$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$$
의 극한값이 존재하려면
㉠, ㉡에서
$g(1)=g(2)=0$
이어야 한다.
이때, 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로
$g(x)=f(x)h(x)$
(단, $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)로 놓을 수 있다.
한편,
$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)h(x)-f(x)|}{f(x)h(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$
(v) $a<1$ 또는 $a>2$일 때,
$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$
이때, $h(a)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로
$h(a)\neq0$이고
$$\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$
$$=\frac{|h(a)-1|}{h(a)}$$
(vi) $1<a<2$일 때,

$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to a}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$

$=-\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

이때, $h(a)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(a)\neq 0$이고

$-\lim_{x\to a}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=-\frac{|h(a)-1|}{h(a)}$

(ⅶ) $a=1$일 때,

$\lim_{x\to 1-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

이때, $h(1)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(1)\neq 0$이고

$\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

$=\frac{|h(1)-1|}{h(1)}$,

$\lim_{x\to 1+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$

$=-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

이때, $h(1)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(1)\neq 0$이고

$-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

$=-\frac{|h(1)-1|}{h(1)}$

$a=1$에서 $\lim_{x\to 1}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

의 극한값이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to 1-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

이어야 한다.

즉, $\frac{|h(1)-1|}{h(1)}=-\frac{|h(1)-1|}{h(1)}$이므로

$|h(1)-1|=-|h(1)-1|$

$h(1)=1$ $\cdots\cdots$ ㉢

이다.

(ⅷ) $a=2$일 때,

$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to 2-}\frac{-f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$

$=-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

이때, $h(2)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(2)\neq 0$이고

$-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=-\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$,

$\lim_{x\to 2+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)\times|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$

이때, $h(2)=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$h(2)\neq 0$이고

$\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$

$a=2$에서 $\lim_{x\to 2}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$

의 극한값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

이어야 한다.

즉, $-\frac{|h(2)-1|}{h(2)}=\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$이므로

$-|h(2)-1|=|h(2)-1|$

$h(2)=1$ …… ㉣

이다.

(ⅴ) ~ (ⅷ)에서

모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$$

의 극한값이 존재하려면

㉢, ㉣에서

$h(1)=h(2)=1$

이어야 한다.

이때, 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)-1=(x-1)(x-2)$

즉, $h(x)=f(x)+1$

따라서

$g(x)=f(x)\times(f(x)+1)$

이고,

$f(-1)=(-1-1)(-1-2)=6$

이므로

$g(-1)=6\times(6+1)=42$

정답 42

[참고]

$h(x)=f(x)+1$

$=(x-1)(x-2)+1$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

이므로 모든 실수 a에 대하여

$h(a)\neq 0$을 만족시킨다.

22. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선

$y=2^x+\frac{k}{2}$, $y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$

가 만나는 점 A의 x좌표를 a라 하면

$2^a+\frac{k}{2}=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^a+k-2$

$2^a=t(t>0)$라 하면

$t+\frac{k}{2}=\frac{k}{t}+k-2$

$2t^2+(4-k)t-2k=0$

$(t+2)(2t-k)=0$

$t>0$이므로

$t=\frac{k}{2}$

즉, $2^a=\frac{k}{2}$이므로

$a=\log_2\frac{k}{2}$

이고,

$2^{\log_2\frac{k}{2}}+\frac{k}{2}=\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=k$

이므로 점 A의 좌표는

$\left(\log_2\frac{k}{2},\ k\right)$

이다.

이때, 실수 k에 대하여 $2^{\log_2\frac{k}{2}}=\frac{k}{2}$이므로 점 A는 곡선 $2^x=\frac{y}{2}$, 즉 $y=2^{x+1}$ 위를 움직인다.

한편, 곡선 $y=2^{x-2}-3$은 곡선 $y=2^{x+1}$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선

$y=2^{x-2}-3$과 만나는 점 B의 좌표는

$\left(\log_2 \frac{k}{2}+3,\ k-3\right)$

이고, 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

이다.

이때 원점 O에서 직선 AB까지의 거리를 h라 하면 삼각형 OAB의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times h=16$

에서

$h=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

이다.

한편, 직선 AB의 방정식은

$y-k=-\left(x-\log_2 \frac{k}{2}\right)$

즉, $x+y-k-\log_2 \frac{k}{2}=0$이고 원점과 직선 AB사이의 거리가 $\frac{16\sqrt{2}}{3}$이므로

$\frac{\left|-k-\log_2 \frac{k}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

$\left|-k-\log_2 k+1\right|=\frac{32}{3}$

$k>1$이므로

$k+\log_2 k-1=\frac{32}{3}$

$k+\log_2 k=\frac{35}{3}$

따라서 $p=3$, $q=35$이므로

$p+q=38$

정답 38

■ **[선택: 확률과 통계]**

23. ③ 24. ④ 25. ③ 26. ⑤ 27. ①
28. ⑤ 29. 44 30. 115

23. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

6개의 문자 a, a, a, a, b, c 중에서
문자 a가 4개 있으므로
이 6개의 문자를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!}=6\times 5=30$

정답 ③

24. **출제의도** : 확률의 덧셈정리와 배반사건, 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$
$=1$

$\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$에서

$1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

따라서

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(A)$
$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

정답 ④

25. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 다항식에서 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(2x-1)^5(x+1)=(2x-1)^5\times x+(2x-1)^5$

이므로

다항식 $(2x-1)^5(x+1)$의 전개식에서

x^3의 계수는 $(2x-1)^5$의 전개식에서

x^2의 계수와 x^3의 계수의 합과 같다.

$(2x-1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}(-1)^r={}_5C_r2^{5-r}(-1)^rx^{5-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

x^2항은 $r=3$일 때이고

x^3항은 $r=2$일 때이므로

x^2의 계수와 x^3의 계수의 합은

${}_5C_3\times2^2\times(-1)^3+{}_5C_2\times2^3\times(-1)^2$

$=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times(-4)+\dfrac{5\times4}{2\times1}\times8$

$=40$

정답 ③

26. 출제의도 : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수인 사건은 A^C이다.

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수가 되도록 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 홀수 1, 3, 5, 7이 적혀 있는 4장의 카드 중에서 서로 다른 2장의 카드를 택하여 양 끝에 나열한 후, 나머지 5장의 카드를 나열된 홀수가 적힌 2장의 카드 사이에 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_4P_2\times5!}{7!}$

$=\dfrac{(4\times3)\times5!}{7!}$

$=\dfrac{4\times3}{7\times6}$

$=\dfrac{2}{7}$

따라서

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\dfrac{2}{7}$

$=\dfrac{5}{7}$

정답 ⑤

27. 출제의도 : 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

남학생 4명, 여학생 1명을 선택한 경우의 수는

${}_5C_4\times{}_3C_1={}_5C_1\times{}_3C_1=5\times3=15$

남학생 5명을 선택한 경우의 수는

${}_5C_5=1$

선택한 5명의 학생을 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉게 하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$(15+1)\times24=384$

정답 ①

28. 출제의도 : 독립시행을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 시행을 5번 반복한 후

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수인 사건을 X,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상인 사건을 Y라 하면

구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)$

이다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수일 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이고, 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닐 확률은

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

이다.

이 시행을 5번 반복할 때,

3의 배수의 눈이 나온 횟수를

m $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$,

3의 배수가 아닌 눈이 나온 횟수를

n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$라 하면

$m+n=5$

이 시행을 5번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수이려면 n이 홀수이어야 한다. 즉,

$n=1$ 또는 $n=3$ 또는 $n=5$

이다.

$n=1$일 때, $m=4$

$n=3$일 때, $m=2$

$n=5$일 때, $m=0$

이므로

$$\mathrm{P}(X)={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$=\frac{10}{3^5}+\frac{80}{3^5}+\frac{32}{3^5}$$

$$=\frac{122}{243}$$

한편,

$n=1,\ m=4$일 때,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합은

$5+1=6$

$n=3,\ m=2$일 때,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합은

$5+3=8$

$n=5,\ m=0$일 때,

상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합은

$5+5=10$

그러므로 사건 $X\cap Y$는

$n=3,\ m=2$ 또는 $n=5,\ m=0$

일 때이고,

$$\mathrm{P}(X\cap Y)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$=\frac{80}{3^5}+\frac{32}{3^5}$$

$$=\frac{112}{243}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{112}{243}}{\frac{122}{243}}=\frac{56}{61}$$

정답 ⑤

29. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a+b=8$인 사건을 X,

$b \geq c$인 사건을 Y라 하면

$a+b=8$ 또는 $b \geq c$일 확률은

$\mathrm{P}(X \cup Y)$

이고,

사건 $X \cap Y$는 $a+b=8$이고 $b \geq c$인 사건이다.

(ⅰ) $a+b=8$인 경우

$a+b=8$을 만족시키는 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$

이다.

한편 c는 1부터 6까지 모든 수가 가능하므로

$$\mathrm{P}(X)=\frac{5}{6^2}\times 1=\frac{5}{36}$$

(ⅱ) $b \geq c$인 경우

$b \geq c$를 만족시키는 두 수 b, c의 순서쌍 (b, c)의 개수는 1부터 6까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{H}_2 &= {}_{6+2-1}\mathrm{C}_2 \\ &= {}_7\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{7\times 6}{2\times 1} \\ &= 21 \end{aligned}$$

한편, a는 1부터 6까지 모든 수가 가능하므로

$$\mathrm{P}(Y)=1\times\frac{21}{6^2}=\frac{7}{12}$$

(ⅲ) $a+b=8$이고 $b \geq c$인 경우

$a+b=8$이고 $b \geq c$인 경우는 다음과 같다.

$a=2$, $b=6$일 때,

c의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 6

$a=3$, $b=5$일 때,

c의 값은 1, 2, 3, 4, 5

$a=4$, $b=4$일 때,

c의 값은 1, 2, 3, 4

$a=5$, $b=3$일 때,

c의 값은 1, 2, 3

$a=6$, $b=2$일 때,

c의 값은 1, 2

그러므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \cap Y) &= \frac{6+5+4+3+2}{6^3} \\ &= \frac{5}{54} \end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \cup Y) &= \mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X \cap Y) \\ &= \frac{5}{36}+\frac{7}{12}-\frac{5}{54} \\ &= \frac{15+63-10}{108} \\ &= \frac{17}{27} \end{aligned}$$

따라서 $p=27$, $q=17$이므로

$$\begin{aligned} p+q &= 27+17 \\ &= 44 \end{aligned}$$

정답 44

30. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)의 x에 1, 2, 3, 4를 각각 대입하면

$f(2)+3 \geq f(1)+1$
$f(3)+3 \geq f(2)+2$
$f(4)+3 \geq f(3)+3$
$f(5)+3 \geq f(4)+4$
이므로
$1 \leq f(1) \leq f(2)+2$,
$f(2)-1 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
조건 (나)에서 $f(2)$의 값은 홀수이므로
$f(2)$의 값은 1 또는 3 또는 5

(ⅰ) $f(2)=1$인 경우
$1 \leq f(1) \leq 3$,
$1 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 3
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)-1$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_3 = {}_{4+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$3\times20=60$

(ⅱ) $f(2)=3$인 경우
$1 \leq f(1) \leq 5$,
$2 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)-1$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_3 = {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2$$
$$= \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$5\times10=50$

(ⅲ) $f(2)=5$인 경우
$1 \leq f(1) \leq 5$
$4 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)-1 \leq 4$
이므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)-1$의 값은 모두 4이므로 경우의 수는 1
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$5\times1=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서
구하는 함수 f의 개수는
$60+50+5=115$

정답 115

■ [선택: 미적분]
23. ① **24.** ② **25.** ④ **26.** ② **27.** ③
28. ① **29.** 109 **30.** 25

23. 출제의도 : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\times3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$$
$$= \frac{12}{0+1}$$
$$= 12$$

정답 ①

24. 출제의도 : 음함수로 나타내어진 함수에서 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3x+y+\cos(xy)=2$
의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3+\frac{dy}{dx}-\sin(xy)\times\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\{1-x\sin(xy)\}\frac{dy}{dx}=y\sin(xy)-3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin(xy)-3}{1-x\sin(xy)}$$

(단, $1-x\sin(xy)\neq 0$)

이때 $x=0$, $y=1$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{0-3}{1-0}=-3$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-3x+1$

따라서 이 접선의 x절편은

$-3x+1=0$에서

$$x=\frac{1}{3}$$

정답 ②

25. **출제의도** : 급수와 수열의 극한값 사이의 관계를 이용하여 미지수를 구한 후 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)=0$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n}-3+\frac{a+\frac{6}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)$$

$=0-3+a=0$

즉 $a=3$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-3n}{n}+\frac{3n+6}{n+3}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{n}-3+\frac{3(n+3)-3}{n+3}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}-3+3-\frac{3}{n+3}\right)$$

$$=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\right.$$
$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{11}{6}$$

따라서

$$S=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=3\times\frac{11}{6}$$

$$=\frac{11}{2}$$

이므로

$$a+S=3+\frac{11}{2}=\frac{17}{2}$$

정답 ④

26. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$g'(a)=\dfrac{1}{f'(g(a))}$이므로

$g'(a)=\dfrac{1}{8}$

에서

$f'(g(a))=8$

이때

$f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+4e^{x}$

에서

$f'(x)=3e^{3x}-6e^{2x}+4e^{x}$

이고

$g(a)=b$

라 하면

$$\begin{aligned}f'(g(a))&=f'(b)\\&=3e^{3b}-6e^{2b}+4e^{b}\end{aligned}$$

이고

$f'(g(a))=8$

이므로

$3e^{3b}-6e^{2b}+4e^{b}=8$

$3e^{3b}-6e^{2b}+4e^{b}-8=0$

$(e^{b}-2)(3e^{2b}+4)=0$

$e^{b}>0$이므로 $e^{b}=2$

즉, $b=\ln 2$

$g(a)=b$

에서

$a=f(b)$

이므로

$$\begin{aligned}a&=f(\ln 2)\\&=e^{3\ln 2}-3e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}\\&=e^{\ln 8}-3e^{\ln 4}+4e^{\ln 2}\\&=8-3\times4+4\times2\\&=4\end{aligned}$$

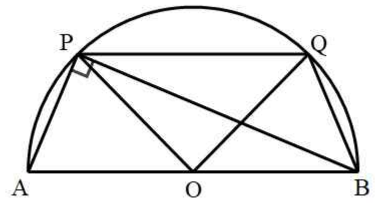
따라서

$a+f'(g(a))=4+8=12$

정답 ②

27. 출제의도 : 삼각함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



선분 AB의 중점을 O라 하면 삼각형 OPA는

$\overline{OP}=\overline{OA}=1$, $\angle AOP=\pi-2\theta$

인 이등변삼각형이다. 사각형 ABQP는 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle BQP=\pi-\theta$이고, 선분 AB와 선분 PQ가 평행하므로 $\angle OBQ=\theta$이다.

따라서 삼각형 OBQ는

$\overline{OQ}=\overline{OB}=1$, $\angle BOQ=\pi-2\theta$

인 이등변삼각형이다.

또, 삼각형 OPQ는

$\overline{OP}=\overline{OQ}=1$,

$\angle POQ=\pi-2(\pi-2\theta)=4\theta-\pi$

인 이등변삼각형이다.

이때, 사각형 ABQP의 넓이는

$$\begin{aligned}f(\theta)&=2\times\frac{1}{2}\times1\times1\times sin(\pi-2\theta)\\&\quad+\frac{1}{2}\times1\times1\times sin(4\theta-\pi)\\&=\sin(\pi-2\theta)+\frac{1}{2}\sin(4\theta-\pi)\\&=\sin2\theta-\frac{1}{2}\sin4\theta\end{aligned}$$

이므로

$f'(\theta)=2\cos 2\theta-2\cos 4\theta$

이다.

한편, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:3$일 때 삼각형 ABP는

$\angle\mathrm{BAP}=a$, $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$

인 직각삼각형이므로

$\cos a=\frac{1}{\sqrt{10}}$

이다. 이때,

$$\begin{aligned}\cos 2a&=\cos(a+a)\\&=\cos a\cos a-\sin a\sin a\\&=\cos^2 a-\sin^2 a\\&=\cos^2 a-(1-\cos^2 a)\\&=2\cos^2 a-1\\&=2\times\frac{1}{10}-1\\&=-\frac{4}{5}\end{aligned}$$

이고, 마찬가지 방법으로

$$\begin{aligned}\cos 4a&=\cos(2a+2a)\\&=2\cos^2 2a-1\\&=2\times\frac{16}{25}-1\\&=\frac{7}{25}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(a)&=2\cos 2a-2\cos 4a\\&=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)-2\times\frac{7}{25}\\&=-\frac{54}{25}\end{aligned}$$

정답 ③

28. 출제의도 : 사잇값의 정리와 합성함수의 미분법 및 이계도함수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서 $f(-3)f(3)<0$이므로

사잇값의 정리에 의하여

$f(\alpha)=0\ (-3<\alpha<3)$

을 만족시키는 α가 존재한다.

또한, 조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$5(f(x))^4\times f'(x)+3(f(x))^2\times f'(x)+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}\quad\cdots\cdots ㉠$$

다시 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$20(f(x))^3\times(f'(x))^2+5(f(x))^4\times f''(x)+6f(x)\times(f'(x))^2+3(f(x))^2\times f''(x)=\frac{2\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$20(f(x))^3\times(f'(x))^2+5(f(x))^4\times f''(x)+6f(x)\times(f'(x))^2+3(f(x))^2\times f''(x)=\frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡은 x에 대한 항등식이므로 $x=\alpha$를 대입하면

$$0=\frac{-2(\alpha+2)(\alpha-1)}{\left(\alpha^2+\alpha+\frac{5}{2}\right)^2}$$

따라서

$\alpha=-2$ 또는 $\alpha=1$

(i) $\alpha=-2$일 때

㉠에 $x=\alpha=-2$를 대입하면

$$a=\frac{2(-2)+1}{(-2)^2+(-2)+\frac{5}{2}}=\frac{-3}{\frac{9}{2}}=-\frac{2}{3}$$

이때 ㉠에서

$5(f(x))^4\times f'(x)+3(f(x))^2\times f'(x)$

$$=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}$$

이므로 $x=2$를 대입하면

$5(f(2))^4\times f'(2)+3(f(2))^2\times f'(2)$

$$=\frac{2\times2+1}{2^2+2+\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}=\frac{64}{51}$$

즉 ,

$5(f(2))^4\times f'(2)+3(f(2))^2\times f'(2)$

$$=\frac{64}{51}$$

이고, 이것은 조건 (나)의 $f'(2)>0$을 만족시킨다.

또, 조건 (가)에 $x=\alpha=-2$를 대입하면

$$-\frac{2}{3}\times(-2)+b=\ln\left\{(-2)^2+(-2)+\frac{5}{2}\right\}$$

$$\frac{4}{3}+b=\ln\frac{9}{2}$$

$$b=-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}$$

(ii) $\alpha=1$일 때

㉠에 $x=\alpha=1$을 대입하면

$$a=\frac{2\times1+1}{1+1+\frac{5}{2}}=\frac{3}{\frac{9}{2}}=\frac{2}{3}$$

이때 ㉠에서

$5(f(x))^4\times f'(x)+3(f(x))^2\times f'(x)$

$$=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}$$

이므로 $x=2$를 대입하면

$5(f(2))^4\times f'(2)+3(f(2))^2\times f'(2)$

$$=\frac{2\times2+1}{2^2+2+\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}$$

즉

$5(f(2))^4\times f'(2)+3(f(2))^2\times f'(2)$

$$=-\frac{4}{51}$$

그런데 조건 (나)에서 $f'(2)>0$이므로 (좌변) ≥ 0, (우변) <0

따라서 모순이다.

(i), (ii)에 의하여

$a=-\frac{2}{3}$, $b=-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}$

이므로

$$a\times e^b=-\frac{2}{3}\times e^{-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}}$$

$$=-\frac{2}{3}\times e^{-\frac{4}{3}}\times e^{\ln\frac{9}{2}}$$

$$=-\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}\times e^{-\frac{4}{3}}$$

$$=-3e^{-\frac{4}{3}}$$

정답 ①

29. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열을 구한 후 등비급수의 합이 존재하는 수열을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에 의하여

$$a_1=\alpha\times\sin\frac{\pi}{2}+\beta\times\cos\frac{\pi}{2}=\alpha$$

$$a_2=\alpha\times\sin\pi+\beta\times\cos\pi=-\beta$$

$$a_3=\alpha\times\sin\frac{3}{2}\pi+\beta\times\cos\frac{3}{2}\pi=-\alpha$$

$$a_4=\alpha\times\sin2\pi+\beta\times\cos2\pi=\beta$$

$$a_5=\alpha$$

$$\vdots$$

이므로

수열 $\{a_n\}$은

$\alpha,\ -\beta,\ -\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \cdots$

이다.

따라서

$a_{4n-2}=-\beta$, $a_{4n-3}=\alpha$

이고

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=\alpha^2\beta^2=4$

에서

$\alpha\beta=-2$ 또는 $\alpha\beta=2$

그런데 α, $\beta(\alpha>\beta)$는 정수이므로

$\alpha=2$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=-1$, $\beta=-2$ 또는

$\alpha=2$, $\beta=-1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=-2$

이다.

이때, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n})=6$$

$$-\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=6 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이고 ㉠을 만족시키기 위해서는

$-1<r<1$

이어야 한다.

따라서

$$-\beta\times\frac{b_1}{1-r}=\alpha\times\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

(ⅰ) $\alpha=2$, $\beta=1$일 때

$$-\frac{b_1}{1-r}=6$$

에서 $1-r>0$이므로

$b_1<0$

이것은 $b_1>0$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\alpha=-1$, $\beta=-2$일 때

$$2\times\frac{b_1}{1-r}=-\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

이므로

$$2=\frac{-r}{1+r},\ 2+2r=-r$$

$$r=-\frac{2}{3}$$

따라서

$$\frac{2b_1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{2b_1}{\frac{5}{3}}=\frac{6b_1}{5}=6$$

에서

$b_1=5$

이므로

$$b_3=b_1r^2=5\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$$

(ⅲ) $\alpha=2$, $\beta=-1$일 때

$$\frac{b_1}{1-r}=2\times\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

이므로

$$1=\frac{2r}{1+r},\ 1+r=2r,\ r=1$$

이것은 $-1<r<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $\alpha=1$, $\beta=-2$일 때

$$2\times\frac{b_1}{1-r}=\frac{b_1r}{1-r^2}=6$$

이므로

$$2=\frac{r}{1+r},\ 2+2r=r,\ r=-2$$

이것은 $-1<r<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅰ) ~ (ⅳ)에서

$b_1=5$, $b_3=\frac{20}{9}$

이므로

$$b_1\times b_3=5\times\frac{20}{9}=\frac{100}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=100$ 이므로

$p+q=109$

정답 109

30. **출제의도** : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$

라 하면

$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1+e^{-x}}=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{1+e^{-x}}=0$

이고,

$h'(x)=\dfrac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0$

이므로

$0<h(x)<2$

이다.

$f(h(x))>0$일 때, $g(x)=f(h(x))$이므로

$g'(x)=f'(h(x))h'(x)$

이고,

$f(h(x))<0$일 때, $g(x)=-f(h(x))$이므로

$g'(x)=-f'(h(x))h'(x)$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 조건 (가)에 의하여 $x=0$에서 극소이므로

$g'(0)=0$

이때, $g(0)>0$이므로

$f(h(0))>0$ 또는 $f(h(0))<0$ …… ㉠

그러므로

$g'(0)=f'(h(0))h'(0)=\dfrac{1}{2}f'(1)$

또는

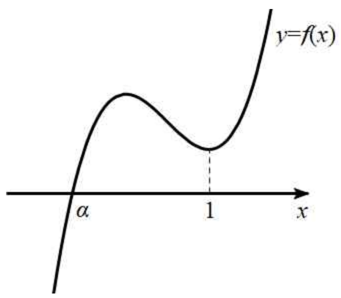
$g'(0)=-f'(h(0))h'(0)=-\dfrac{1}{2}f'(1)$

이므로 $g'(0)=0$이려면 $f'(1)=0$이어야 한다.

또, $g'(x)=f'(h(x))h'(x)$ 또는 $g'(x)=-f'(h(x))h'(x)$에서 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)>0$이고, 함수 $g'(x)$의 부호가 $x=0$의 좌우에서 바뀌므로 $f'(x)$의 부호가 $x=h(0)=1$의 좌우에서 바뀐다.

즉, 삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가져야 하고 ㉠에서 $f(1)>0$ 또는 $f(1)<0$이다.

만일 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이면 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극소이고, 함수 $|f(h(x))|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 그림과 같이 $f(1)>0$이어야 한다.



또, $f(\alpha)=0$이고 $h(x)=\alpha$인 x가 존재하면 함수 $g(x)$가 $h(x)=\alpha$인 x에서 미분가능하지 않으므로 $\alpha\le 0$이어야 한다.

이때 $0<h(x)<2$에서 $f(h(x))>0$이므로

$g(x)=f(h(x))$

이고,

$$g'(x)=f'(h(x))h'(x)=f'\left(\dfrac{2}{1+e^{-x}}\right)\times\dfrac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

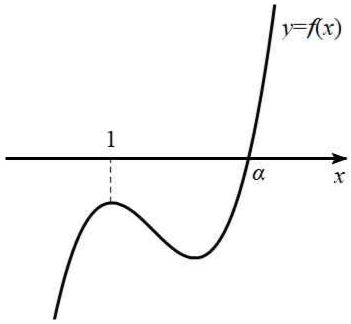
이 경우

$$g'(\ln 3)=f'\left(\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{3}}\right)\times\dfrac{\dfrac{2}{3}}{\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2}=f'\left(\dfrac{3}{2}\right)\times\dfrac{3}{8}$$

에서 $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$이므로 $g'(\ln 3)>0$이다.

이것은 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 이 경우 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극소이고 함수 $|f(h(x))|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 그림과 같이 $f(1)<0$이어야 한다.



마찬가지로 $f(\alpha)=0$이고 $h(x)=\alpha$인 x가 존재하면 함수 $g(x)$가 $h(x)=\alpha$인 x에서 미분가능하지 않으므로 $\alpha \geq 2$이어야 한다.

이때 $0<h(x)<2$에서 $f(h(x))<0$이므로

$g(x)=-f(h(x))$

이고,

$$g'(x)=-f'(h(x))h'(x)$$
$$=-f'\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\times\frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

이 경우

$$g'(\ln 3)=-f'\left(\frac{2}{1+\frac{1}{3}}\right)\times\frac{\frac{2}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=-f'\left(\frac{3}{2}\right)\times\frac{3}{8}$$

이므로 $f'\left(\frac{3}{2}\right)>0$이면 조건 (나)의

$g'(\ln 3)<0$을 만족시킨다.

또, 조건 (나)에서

$$|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$$

이고 $f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}\times\left\{-f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

즉, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$

한편, $f'(1)=0$이고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-a)$ (a는 1보다 큰 상수)

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f(x)=x^3-\frac{3(a+1)}{2}x^2+3ax+C$$

(C는 적분상수)

라 하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{3(a+1)}{8}+\frac{3a}{2}+C$$
$$=\frac{9}{8}a-\frac{1}{4}+C,$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3(a+1)}{2}+3a=\frac{3}{2}a-\frac{3}{4}$$

이므로

$$\frac{3}{2}a-\frac{3}{4}=-\frac{9}{8}a+\frac{1}{4}-C$$

즉, $C=-\frac{21}{8}a+1$이므로

$$f(x)=x^3-\frac{3(a+1)}{2}x^2+3ax-\frac{21}{8}a+1$$

그러므로

$$g(0)=-f(1)=\frac{9}{8}a-\frac{1}{2}$$

이때 $f(2)\leq 0$이어야 하므로

$$3-\frac{21}{8}a\leq 0$$

즉, $a\geq\frac{8}{7}$이고

$$g(0)\geq\frac{9}{8}\times\frac{8}{7}-\frac{1}{2}=\frac{11}{14}$$

이므로 $g(0)$의 최솟값은 $\frac{11}{14}$이다.

따라서 $p+q=14+11=25$

정답 25

■ [선택: 기하]				
23. ②	**24.** ④	**25.** ②	**26.** ①	**27.** ③
28. ④	**29.** 20	**30.** 36		

23. 출제의도 : 성분으로 나타낸 평면벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}=(2,\ 6)$, $\vec{b}=(k,\ -6)$에서

$\vec{a}+\vec{b}=(2+k,\ 0)$

$\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합이 4이므로

$(2+k)+0=4$, $k=2$

정답 ②

24. 출제의도 : 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $(3,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=6(x+3)$, 즉 $y=x+3$

위의 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=1+3=4$

정답 ④

25. 출제의도 : 법선벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ -4)$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -4)-(4,\ 0)=(-2,\ -4)$

이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$에 수직이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$-2(x-4)-4(y-0)=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$

따라서 이 직선의 y절편은 2이다.

정답 ②

26. 출제의도 : 쌍곡선의 점근선의 방정식을 이해하고 쌍곡선의 접선의 방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있는가?

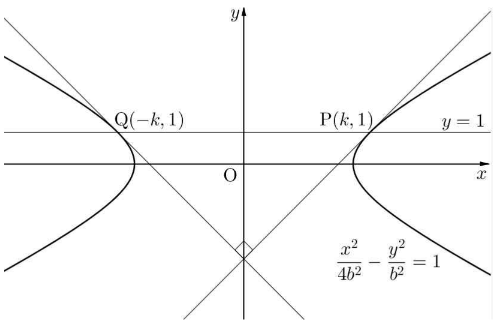
정답풀이 :

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=\dfrac{1}{2}x$이고, $a>0$, $b>0$이므로

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$에서 $a=2b$ …… ㉠

그러므로 이 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{x^2}{4b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



이 쌍곡선이 직선 $y=1$과 만나는 점 중 제1사분면의 점을 P, 제2사분면의 점을 Q라 하고, 점 P의 x좌표를 k $(k>0)$이라 하면 두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(k,\ 1)$, $\mathrm{Q}(-k,\ 1)$

두 점 P, Q가 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{k^2}{4b^2}-\dfrac{1}{b^2}=1$에서 $b^2=\dfrac{k^2}{4}-1$ …… ㉡

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(k,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{kx}{4b^2}-\dfrac{y}{b^2}=1$, 즉 $y=\dfrac{k}{4}x-b^2$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 두 점 P, Q에서의 접선이 y축에 대하여 대칭이고 서로 수직이므로 점 P에서의 접선의 기울기가 1이어야 한다.

즉, $\dfrac{k}{4}=1$이므로 $k=4$

㉡에서 $b^2=4-1=3$

㉠에서 $a^2=4b^2=4\times3=12$

따라서 $a^2+b^2=15$

정답 ①

27. 출제의도 : 벡터의 내적을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\vec{a}+\vec{b}|=6$의 양변을 제곱하여 정리하면

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36\ \cdots\ ㉠\end{aligned}$$

마찬가지로 $|2\vec{a}-\vec{b}|=9$의 양변을 제곱하여 정리하면 $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=81$에서

$4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=81$ … ㉡

한편, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$에서

$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$, 즉 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ … ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 각각 대입하여 정리하면

$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=18$ … ㉣

$5|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=81$ … ㉤

5×㉣−㉤을 하면

$9\vec{a}\cdot\vec{b}=9$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ … ㉥

㉥을 ㉣에 대입하여 정리하면

$|\vec{a}|^2=17$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{17}$

㉥에서

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle\mathrm{AOB})=1$

$\cos(\angle\mathrm{AOB})=\dfrac{1}{17}$

$$\begin{aligned}\sin(\angle\mathrm{AOB})&=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{AOB})}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{17}\right)^2}\\&=\frac{12\sqrt{2}}{17}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\sin(\angle\mathrm{AOB})$

$=\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{17})^2\times\dfrac{12\sqrt{2}}{17}=6\sqrt{2}$

[다른 풀이]

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{17}$

이고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{17}$이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형이다. 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이고 $|\vec{a}+\vec{b}|=6$에서

$|\vec{a}+\vec{b}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=2\overline{\mathrm{OM}}=6$

$\overline{\mathrm{OM}}=3$

직각삼각형 OAM에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AM}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{17})^2-3^2}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=4\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OM}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3=6\sqrt{2}$

정답 ③

28. 출제의도 : 타원의 정의와 도형의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

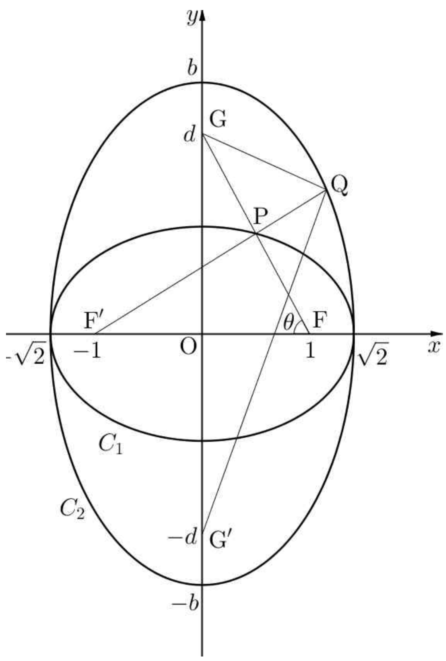
타원 $C_1 : \frac{x^2}{a^2}+y^2=1$의 장축의 길이가 $2a$이고, $\overline{GP}=\overline{PF}$이므로

$\overline{GP}+\overline{PF'}=\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$

즉, $2a=2\sqrt{2}$에서 $a=\sqrt{2}$

이때 $c^2=a^2-1=1$에서 $c=1$이므로

F(1, 0), F′(−1, 0)



$\overline{PF}=k$ $(k>0)$이라 하면 $\overline{GF}=2k$이고,

$\overline{PF'}=2\sqrt{2}-\overline{PF}=2\sqrt{2}-k$

$\angle PFF'=\theta$라 하면 직각삼각형 GOF에서

$\cos\theta=\frac{\overline{OF}}{\overline{GF}}=\frac{1}{2k}$ …… ㉠

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{\overline{PF}^2+\overline{F'F}^2-\overline{PF'}^2}{2\times\overline{PF}\times\overline{F'F}}$$
$$=\frac{k^2+4-(2\sqrt{2}-k)^2}{2\times2\times k}$$
$$=\frac{4k\sqrt{2}-4}{4k}$$
$$=\frac{k\sqrt{2}-1}{k} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{2k}=\frac{k\sqrt{2}-1}{k}$

$2k\sqrt{2}=3$

$k=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

그러므로 직각삼각형 GOF에서

$\overline{OG}^2=\overline{GF}^2-\overline{OF}^2$

이므로

$d^2=4k^2-1$

$=4\times\frac{9}{8}-1=\frac{7}{2}$

타원 C_2의 꼭짓점 중 y좌표가 양수인 점의 y좌표를 b라 하면

$b^2-(\sqrt{2})^2=\frac{7}{2}$

이므로

$b^2=\frac{11}{2}$

이때 $b>0$이므로

$b=\frac{\sqrt{22}}{2}$

따라서 $\overline{QG}+\overline{QG'}$의 값은 타원 C_2의 장축의 길이이므로

$\overline{\mathrm{QG}}+\overline{\mathrm{QG'}}=2b=2\times\frac{\sqrt{22}}{2}=\sqrt{22}$

정답 ④

29. **출제의도** : 쌍곡선의 정의와 도형의 성질을 이용하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 쌍곡선은 y축에 대하여 대칭이므로

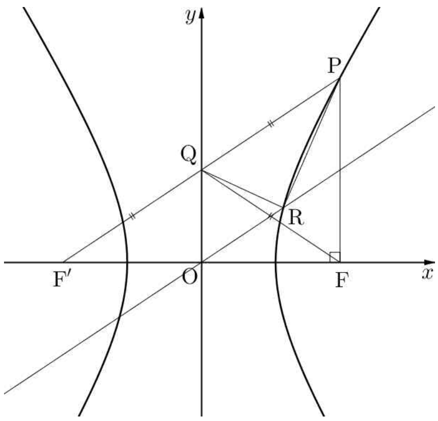
$\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QF}}$

즉, 점 Q는 세 점 P, F′, F를 지나는 원의 중심이고 이때 선분 PF′이 이 원의 지름이므로

$\angle\mathrm{PFF'}=\frac{\pi}{2}$

또, 삼각형 QF′O와 삼각형 PF′F가 서로 닮음이고 그 닮음비가 1 : 2이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=2\times\overline{\mathrm{OQ}}=4$



한편, 직선 F′P와 직선 OR이 서로 평행하며 $\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{QP}}$이고, 삼각형 PQR의 넓이가 3이므로 삼각형 QF′O의 넓이도 3이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OF'}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=3$에서

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OF'}}\times2=3$, $\overline{\mathrm{OF'}}=3$

그러므로

$\overline{\mathrm{F'Q}}^2=\overline{\mathrm{OF'}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2$

$=3^2+2^2=13$

즉, $\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{QP}}=\sqrt{13}$

이때 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{13}-4$이므로 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{13}-4$이다.

따라서 $p=-4$, $q=2$이므로

$p^2+q^2=16+4=20$

정답 20

30. **출제의도** : 벡터의 성질과 내적을 이용하여 벡터의 내적의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2\overrightarrow{\mathrm{BE}}=3\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{3-1}$

이므로 점 E는 선분 AC를 3:1로 외분하는 점이다.

선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 P′을

$\overrightarrow{\mathrm{BP'}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

가 되도록 잡으면

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}-(\overrightarrow{\mathrm{BP'}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

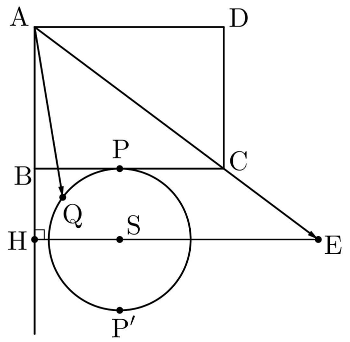
$=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}-\overrightarrow{\mathrm{BP'}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}$

이고 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0$에서

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}=0$

즉, 점 Q는 선분 PP′을 지름으로 하는 원 위의 점이다.



점 Q가 나타내는 원의 중심을 S, 점 S에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 E는 직선 SH 위의 점이다.

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{SQ}\right)$

$\qquad=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{SQ}$

이고, $0\le t\le 8$인 실수 t에 대하여

$\overrightarrow{HS}=t\overrightarrow{BC}$

이므로 $t=0$이고 두 벡터 $\overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{AE}$의 방향이 서로 반대일 때 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값은 최소이다. 즉, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최솟값은

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AH}+0+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{SQ}$

$\qquad=|\overrightarrow{AH}|^2-|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{SQ}|$

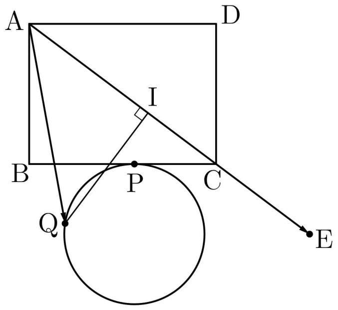
$\qquad=9^2-\sqrt{9^2+12^2}\times 3$

$\qquad=81-15\times 3$

$\qquad=36$

정답 36

[다른 풀이 1]



점 Q에서 직선 AE에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 점 P의 위치에 관계없이 선분 AE 위에 있고

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AQ}|\cos(\angle QAE)$

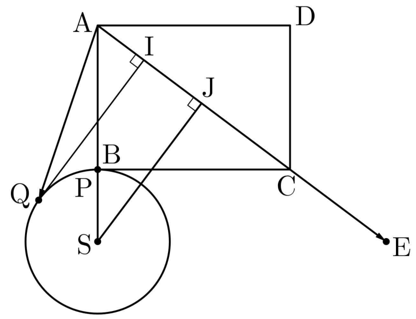
$\qquad=\overline{AE}\times\overline{AI}$

이다. 이때

$\overline{AE}=\dfrac{3}{2}\overline{AC}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$

$\qquad=\dfrac{3}{2}\times\sqrt{6^2+8^2}=\dfrac{3}{2}\times 10=15$

이고 선분 AI의 길이는 점 P가 점 B와 일치하고 직선 QI가 점 Q가 나타내는 원에 접할 때 최소이다.



점 Q가 나타내는 원의 중심을 S라 하고 점 S에서 직선 AE에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{AJ}=\overline{AS}\cos(\angle SAJ)=9\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{5}$

$\overline{AI}=\overline{AJ}-\overline{IJ}=\dfrac{27}{5}-3=\dfrac{12}{5}$

따라서 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최솟값은

$\overline{AE}\times\overline{AI}=15\times\dfrac{12}{5}=36$

[다른 풀이 2]

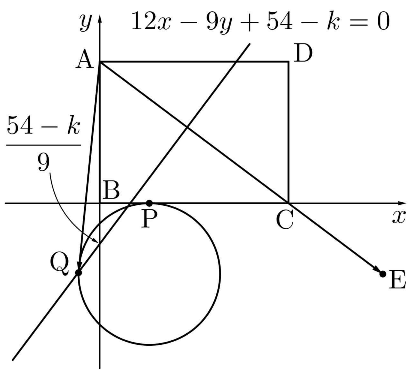
네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 $(0,\ 6)$, $(0,\ 0)$, $(8,\ 0)$, $(8,\ 6)$이라 하자. $2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$에서

$\overrightarrow{BE}=\dfrac{3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}}{2}$

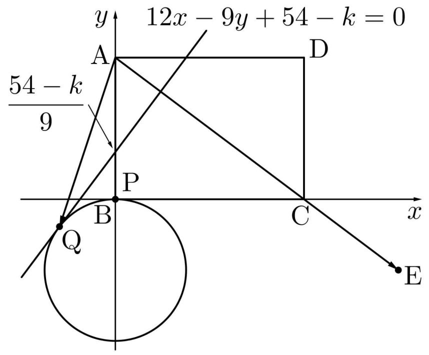
$\quad=\dfrac{3(8,\ 0)-(0,\ 6)}{2}$

$\quad=(12,\ -3)$

이다. 점 P가 선분 BC 위를 움직이는 점이므로 $0 \le t \le 8$인 실수 t에 대하여 점 P의 좌표를 $(t,\ 0)$으로 놓을 수 있다.
점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{AB}) = 0$에서
$(x-t,\ y) \cdot ((x-t,\ y)-(0,\ -6))$
$= (x-t,\ y) \cdot (x-t,\ y+6)$
$= (x-t)^2 + y(y+6) = 0$
$(x-t)^2 + (y+3)^2 = 9$
즉, 점 Q는 점 $(t,\ -3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.
이때 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ} = k$라 하면
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$
$= ((12,\ -3)-(0,\ 6)) \cdot ((x,\ y)-(0,\ 6))$
$= (12,\ -9) \cdot (x,\ y-6)$
$= 12x - 9(y-6)$
$= 12x - 9y + 54 = k$
$12x - 9y + 54 - k = 0$



즉, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}$의 값은 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 점 Q를 지나는 직선의 y절편이 최대일 때 최소이다.



따라서 $t=0$일 때, 즉, 원
$x^2 + (y+3)^2 = 9$
에 접하고 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선의 y절편이 최대일 때 k의 값이 최소이므로 k의 최솟값을 k_0이라 하면
$$\frac{|-9 \times (-3) + 54 - k_0|}{\sqrt{12^2 + (-9)^2}} = 3$$
에서 $81 - k_0 = 45$
$k_0 = 81 - 45 = 36$