정답 및 해설

고3

수학 영역

정답

1	③	2	④	3	②	4	①	5	⑤
6	①	7	④	8	②	9	④	10	③
11	③	12	②	13	⑤	14	②	15	①
16	2	17	5	18	163	19	10	20	24
21	28	22	76						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[4]{3}\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=3$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2+1$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4$

3. [출제의도] 등비수열의 일반항 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)

$a_1\times a_{13}=a\times ar^{12}=a^2r^{12}=(ar^6)^2=64$

$ar^6=8$ ⋯ ㉠

$\dfrac{a_5}{a_2}=\dfrac{ar^4}{ar}=r^3=2$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$4a=8,\ a=2$

따라서 $a_4=ar^3=2\times 2=4$

4. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(ax^3-5)=8a-5$

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(ax+1)=2a+1$

$f(2)=2a+1,\ 8a-5=2a+1$

따라서 $a=1$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+0\times f'(1)=2\times 5=10$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$이므로

$\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{5}$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$

7. [출제의도] 적분과 미분의 관계 이해하기

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2$

$xf'(x)=3x^2$

$f'(x)=3x$

$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^3$

$x=1$일 때,

$0=1\times f(1)-1,\ f(1)=1$

$f(1)=\dfrac{3}{2}+C=1$이므로 $C=-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(2)=6-\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}$

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_2 a+\log_4 ab=\log_4 a^2+\log_4 ab$

$=\log_4 a^3b=\dfrac{5}{2}$

$a^3b=4^{\frac{5}{2}}=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5=32$

두 수 a, b는 1이 아닌 자연수이므로

$32=2^3\times 4$

$a=2,\ b=4$

따라서 $a+b=6$

9. [출제의도] 정적분 이해하기

$f(0)-f(-1)=\int_{-1}^0 f'(x)dx$이므로

$f(0)-f(-1)+\int_0^1\{x^2+2x+f'(x)\}dx$

$=\int_{-1}^0 f'(x)dx+\int_0^1(x^2+2x)dx+\int_0^1 f'(x)dx$

$=\int_{-1}^1 f'(x)dx+\int_0^1(x^2+2x)dx$

$=0+\left[\dfrac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$

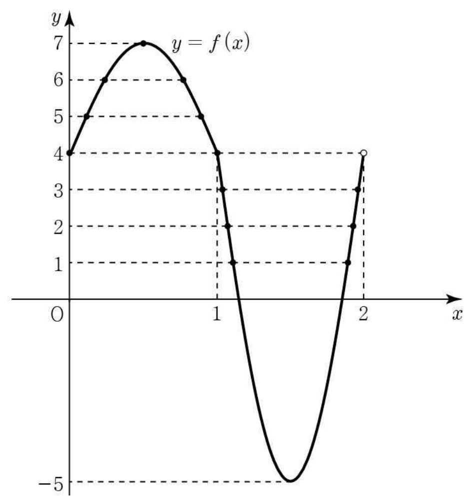
$=\left(\dfrac{1}{3}+1\right)-0=\dfrac{4}{3}$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=\begin{cases}3\sin\pi x+4 & (0\le x<1)\\ 9\sin\pi x+4 & (1\le x<2)\end{cases}$

두 함수 $y=3\sin\pi x+4$, $y=9\sin\pi x+4$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는 13

11. [출제의도] 미분을 활용하여 속도와 가속도 문제 해결하기

시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|x_1-x_2|=\left|t^3-\dfrac{15}{2}t^2+12t+10\right|$

$f(t)=t^3-\dfrac{15}{2}t^2+12t+10\ (t\ge 0)$이라 하면

$f'(t)=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	⋯	1	⋯	4	⋯
$f'(t)$		+	0	−	0	+
$f(t)$	10	↗	극대	↘	극소	↗

$t\ge 0$에서 함수 $f(t)$의 최솟값이 $f(4)=2$이므로 $f(t)>0$

$|x_1-x_2|=t^3-\dfrac{15}{2}t^2+12t+10$이고

두 점 P, Q 사이의 거리는 $t=4$에서 최소이다.

시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=\dfrac{dx_1}{dt}=3t^2-10t+10$

$a(t)=v'(t)=6t-10$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$a(4)=6\times 4-10=14$

12. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

$b_4=a_3+b_3$

$b_5=b_4+1=a_3+b_3+1$

$b_6=b_5+1=a_3+b_3+2$

$b_7=a_6+b_6=a_6+a_3+b_3+2$

$b_8=b_7+1=a_6+a_3+b_3+3$

$b_9=b_8+1=a_6+a_3+b_3+4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=1+2d,\ a_6=1+5d$이므로

$b_9-b_3=a_6+a_3+4=7d+6=27$

$d=3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10\times\{2\times1+(10-1)\times3\}}{2} = 145$$

[참고]

$b_1 = \alpha$ (α는 실수)라 하면

$b_3 = b_1 + 2 = \alpha + 2$

$b_9 = a_6 + a_3 + b_1 + 6 = 2 + 7d + \alpha + 6$

$b_9 - b_3 = 7d + 6$

13. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to0-} g(x) = \lim\limits_{x\to0+} g(x) = g(0)$

$\lim\limits_{x\to0-} g(x) = f(a)+b$

$\lim\limits_{x\to0+} g(x) = \lim\limits_{x\to0+} f(x) = 5$

$g(0) = f(0) = 5$

$f(a)+b = 5$

$a^2-4a+b=0$ ⋯ ㉠

$f(x)=(x-2)^2+1$이므로

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 1을 갖는다.

함수 $y=f(x+a)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다.

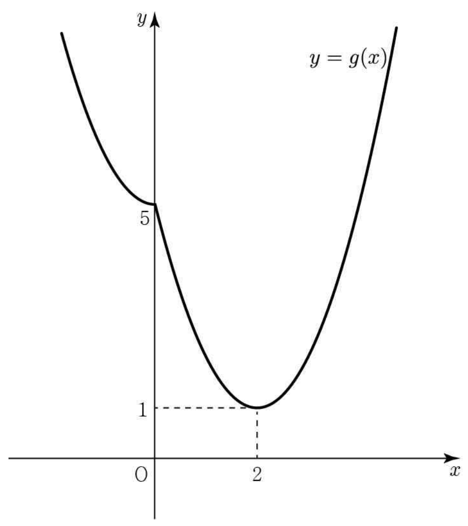
$f(x+a)+b=\{x-(2-a)\}^2+1+b$이므로

함수 $y=f(x+a)+b$는

$x=2-a$에서 최솟값 $1+b$를 갖는다.

(i) $2-a \ge 0$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



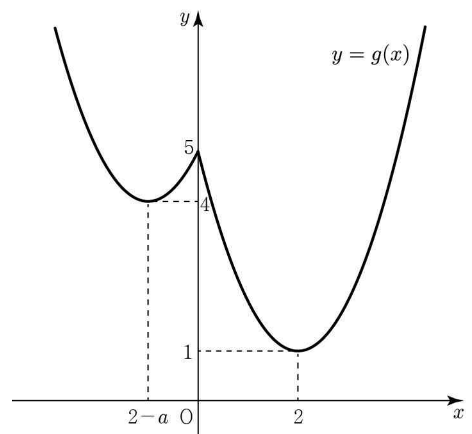
$k=4$ 또는 $k=5$일 때,

$\left|\lim\limits_{t\to k+} h(t) - \lim\limits_{t\to k-} h(t)\right| \ne 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2-a<0$인 경우

$\left|\lim\limits_{t\to k+} h(t) - \lim\limits_{t\to k-} h(t)\right| = 2$를 만족시키는 k의 값이 1, 4, 5이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2-a)=1+b=4$, $b=3$

㉠에 의하여

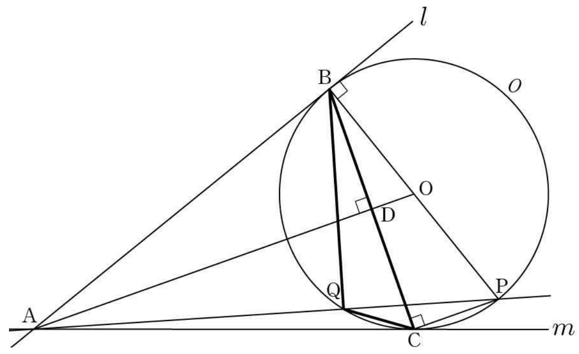
$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$a>2$이므로 $a=3$

따라서 $g(-4)=f(-4+3)+3=10+3=13$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

직선 l과 직선 BP가 서로 수직이므로 직선 BP는 원의 중심을 지나고, 선분 BP는 원 O의 지름이다. 원 O의 중심을 O, 선분 AO와 선분 BC가 만나는 점을 D라 하자.



$\overline{\mathrm{AO}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BO}}^2 = 12^2 + (3\sqrt{2})^2 = 162$

$\overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AO}}\times\overline{\mathrm{BD}} = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BO}}$

$\frac{1}{2}\times9\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{BD}} = \frac{1}{2}\times12\times3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{BD}}=4$

$\overline{\mathrm{BC}} = 2\times\overline{\mathrm{BD}} = 8$

원주각의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{BPQ} = \angle\mathrm{BCQ}$, $\angle\mathrm{QPC} = \angle\mathrm{QBC}$

$\sin(\angle\mathrm{BCQ}) : \sin(\angle\mathrm{QBC}) = 3:1$

삼각형 BQC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\sin(\angle\mathrm{BCQ})} = \frac{\overline{\mathrm{QC}}}{\sin(\angle\mathrm{QBC})}$

$\overline{\mathrm{BQ}} : \overline{\mathrm{QC}} = 3:1$

$\overline{\mathrm{QC}} = k\ (k>0)$이라 하면, $\overline{\mathrm{BQ}} = 3k$

삼각형 BCP는

$\angle\mathrm{BCP} = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\angle\mathrm{BPC} = \theta$라 하면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 BCP에서

$\sin\theta = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{8}{6\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$

사각형 BQCP는 원 O에 내접하므로

$\angle\mathrm{CQB} = \pi-\theta$이다.

$\cos(\angle\mathrm{CQB}) = \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = -\frac{1}{3}$

삼각형 BQC에서 코사인법칙에 의하여

$8^2 = k^2 + (3k)^2 - 2\times k\times3k\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$k^2 = \frac{16}{3}$

따라서 삼각형 BQC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BQ}}\times\overline{\mathrm{QC}}\times\sin(\angle\mathrm{CQB})$

$= \frac{1}{2}\times3k\times k\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = k^2\times\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$$g(x) = \begin{cases} |x^2+ax+b| - x^2 & (x\le0) \\ (x^2+ax+b)^2 + x^3 & (x>0) \end{cases}$$

구간 $(0, \infty)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하므로 조건 (가)에 의하여 $b\le0$

(i) $b=0$인 경우

$f(x) = x^2+ax = x(x+a)$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x+a)| - x^2 & (x\le0) \\ x^2(x+a)^2 + x^3 & (x>0) \end{cases}$$

① $a>0$인 경우

$$g(x) = \begin{cases} ax & (x\le-a) \\ -2x^2-ax & (-a<x\le0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

$x=-a$에서의 미분가능성을 조사하면

$\lim\limits_{x\to-a-} \frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$

$= \lim\limits_{x\to-a-} \frac{ax-(-a^2)}{x+a} = a$

$\lim\limits_{x\to-a+} \frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$

$= \lim\limits_{x\to-a+} \frac{(-2x^2-ax)-(-a^2)}{x+a}$

$= \lim\limits_{x\to-a+} \frac{-(2x-a)(x+a)}{x+a} = 3a$

$a>0$이므로 $a\ne3a$

함수 $g(x)$는 $x=-a$에서 미분가능하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a=0$인 경우

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x\le0) \\ x^4+x^3 & (x>0) \end{cases}$$

$x=0$에서의 미분가능성을 조사하면

$\lim\limits_{x\to0-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0-} \frac{0-0}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to0+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0+} \frac{x^4+x^3-0}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to0-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0+} \frac{g(x)-g(0)}{x}$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $a<0$ 인 경우

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x\le 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x<0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=ax\ne 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로 연속이다.

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)$

$\lim_{x\to 0-} g(x)=|b|=-b$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=b^2$

$g(0)=|b|=-b$

이므로 $-b=b^2$

$b<0$ 이므로 $b=-1$ 이고, 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 에서만 미분가능하지 않다.

$$g(x)=\begin{cases} |x^2+ax-1|-x^2 & (x\le 0) \\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

방정식 $x^2+ax-1=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$ 라 하면, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-1$ 이므로

$\alpha<0<\beta$

$$g(x)=\begin{cases} ax-1 & (x\le\alpha) \\ -2x^2-ax+1 & (\alpha<x\le 0) \\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{(-2x^2-ax+1)-1}{x}=-a$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\{(x^2+ax-1)^2+x^3\}-1}{x}=-2a$$

에서 $-a=-2a$, $a=0$

$$g(x)=\begin{cases} |x^2-1|-x^2 & (x\le 0) \\ (x^2-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

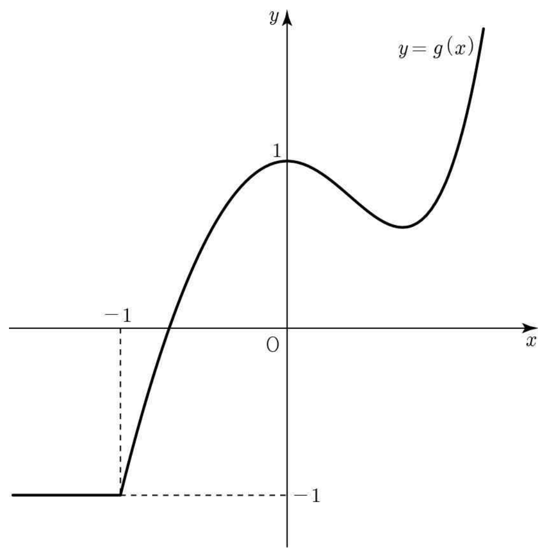
따라서 $g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(3)=\frac{1}{2}+91=\frac{183}{2}$

[참고]

$f(x)=x^2-1$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & (x\le -1) \\ -2x^2+1 & (-1<x\le 0) \\ x^4+x^3-2x^2+1 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$2\log_3(x+1)=\log_3(x+7)$

$\log_3(x+1)^2=\log_3(x+7)$

$(x+1)^2=x+7$

$x^2+2x+1=x+7$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=-3$ 또는 $x=2$

로그의 진수는 양수이므로

$x+1>0$, $x+7>0$

$x>-1$

따라서 $x=2$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2+1)dx$

$=2x^3+x+C$ (단, C 는 적분상수)

$f(0)=C=2$

$f(x)=2x^3+x+2$

따라서 $f(1)=2+1+2=5$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{19}(2a_{k+1}-b_k)$

$=2\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{19}b_k=150$ ⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{19}(a_{k+1}+b_k)$

$=\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}+\sum_{k=1}^{19}b_k=330$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$3\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}=480$, $\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}=160$

따라서

$\sum_{k=1}^{20}a_k=a_1+\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}=3+160=163$

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$ 를 만족시키므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b 는 상수)

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 -6 을 가지므로

$f'(2)=32+4a=0$, $f(2)=16+4a+b=-6$

$a=-8$, $b=10$

$f(x)=x^4-8x^2+10$

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-2	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

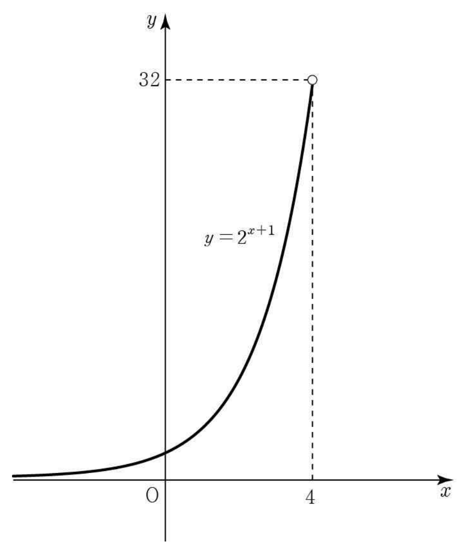
따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(0)=10$

20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 추론하기

$$g(x)=\begin{cases} 2^{x+1} & (x<4) \\ 2f(x) & (x>4)\end{cases}$$

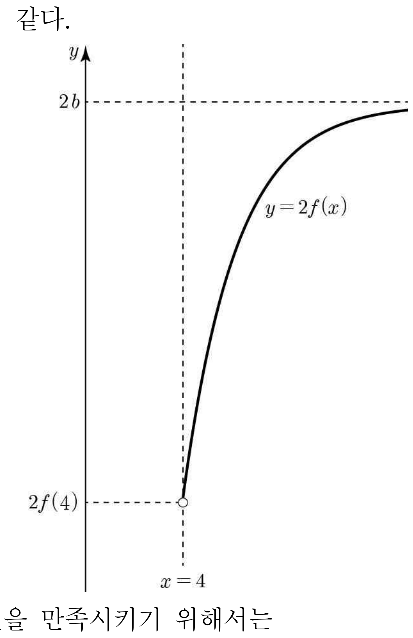
(i) $x<4$ 인 경우

함수 $y=2^{x+1}$ 의 그래프는 직선 $y=0$ 을 점근선으로 가지므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(ii) $x>4$ 인 경우

함수 $y=2f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=2b$ 를 점근선으로 가지므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건을 만족시키기 위해서는

$2b=32$, $b=16$

$2f(4)=-2^{a-3}+2b$

$= -2^{a-3}+32=0$

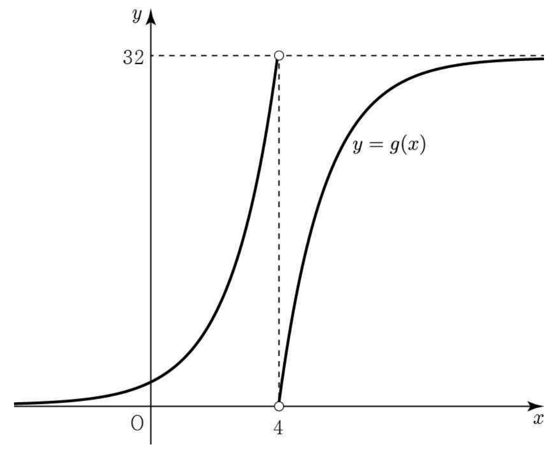
$2^{a-3}=2^5$, $a=8$

$$g(x)=\begin{cases}2^{x+1} & (x<4)\\ -2^{-x+9}+32 & (x>4)\end{cases}$$

따라서 $g(6)=-2^3+32=24$

[참고]

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



21. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=-2x+k$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식 $y=g(x)$는

$g(x)=(-2a+k)(x-a)-a^2+ka$

$\quad\ =(-2a+k)x+a^2$

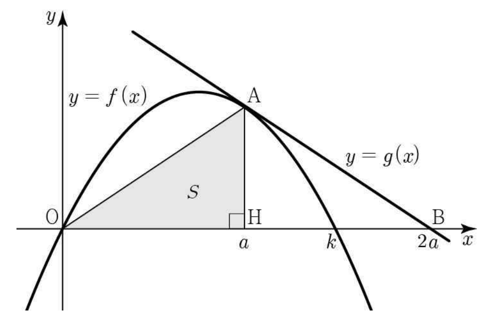
$0=(-2a+k)x+a^2$에서 $x=\dfrac{a^2}{2a-k}=b$

직선 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 B라 하자.

$\displaystyle\int_a^b g(x)dx=S$이므로 삼각형 BAH의 넓이와 삼각형 AOH의 넓이는 서로 같다.

점 H의 좌표는 $(a,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{BH}}$이므로

$b=2a$



$\dfrac{a^2}{2a-k}=2a$에서 $k=\dfrac{3}{2}a$

$\displaystyle\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx$

$\displaystyle=\int_0^a\left(-x^2+\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}ax\right)dx$

$\displaystyle=\int_0^a(-x^2+ax)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a$

$=\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{32}{3}$

$a=4$, $k=6$

$g(x)=-2x+16$

따라서 $g(-k)=g(-6)=12+16=28$

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 문제 해결하기

a_n, a_{n+1}이 모두 홀수라 가정하면

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 a_{n+2}는 짝수이므로

연속하는 세 항 중 적어도 하나의 항은 짝수이다. … (★)

(i) a_4가 짝수인 경우

$a_6=6=\dfrac{1}{2}a_4$, $a_4=12$

a_4가 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2, a_3, a_5는 홀수이다.

a_2, a_3이 홀수이므로 (★)에 의하여

a_1은 짝수이다.

$a_3=\dfrac{1}{2}a_1$

$a_5=a_4+a_3=12+\dfrac{1}{2}a_1$

$a_4=a_3+a_2=\dfrac{1}{2}a_1+a_2=12$

$a_2=12-\dfrac{1}{2}a_1$

a_2가 홀수이므로

$\dfrac{1}{2}a_1$은 11 이하의 홀수이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	11	1	12	13	6
6	9	3	12	15	6
10	7	5	12	17	6
14	5	7	12	19	6
18	3	9	12	21	6
22	1	11	12	23	6

주어진 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값은 2, 6, 10, 14, 18, 22이다.

(ii) a_4가 홀수인 경우

$a_6=6=a_5+a_4$에서

a_4, a_5가 홀수이므로 (★)에 의하여

a_3은 짝수이다.

$a_5=\dfrac{1}{2}a_3$에서 $a_4=6-\dfrac{1}{2}a_3$

a_3이 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2는 홀수이다.

$a_4=a_3+a_2$에서

$6-\dfrac{1}{2}a_3=a_3+a_2$이므로 $a_3=4-\dfrac{2}{3}a_2$

a_3이 자연수이므로 $a_2=3$, $a_3=2$

a_1이 홀수이면 $a_3=a_2+a_1$

$2=3+a_1$이므로 a_1은 자연수가 아니다.

그러므로 a_1은 짝수이고

$a_3=\dfrac{1}{2}a_1$, $a_1=4$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
4	3	2	5	1	6

따라서 (i), (ii)에 의하여

모든 a_1의 값의 합은

$(2+6+10+14+18+22)+4=76$

미적분 정답

23	①	24	④	25	③	26	②	27	⑤
28	②	29	16	30	72				

미적분 해설

23. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{7x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{7x}-1}{7x}\times7\right)=7$

24. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$x=t+\sin t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=1+\cos t$

$y=-4\cos t+2\sin^2 t$에서

$\dfrac{dy}{dt}=4\sin t+4\sin t\cos t$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4\sin t(1+\cos t)}{1+\cos t}=4\sin t$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{3}$일 때,

$\dfrac{dy}{dx}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^n+1}$$

(i) $0<\dfrac{x}{5}<1$인 경우

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^n+1}=2x$$

$f(k)=2k=5$에서 $k=\dfrac{5}{2}$

(ii) $\dfrac{x}{5}=1$인 경우

$x=5$이므로

$f(5)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\times5}{1+1}=\frac{11}{2}$

$f(5)\neq5$

(iii) $\dfrac{x}{5}>1$인 경우

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n=\infty$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x}{5}\right)^n}=0$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{5}+\frac{2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^n}}{1+\frac{1}{\left(\frac{x}{5}\right)^n}}=\frac{x}{5}$$

$f(k)=\dfrac{k}{5}=5$에서 $k=25$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

$f(k)=5$인 모든 양수 k의 값의 합은

$\frac{5}{2}+25=\frac{55}{2}$

26. [출제의도] 부분적분법 이해하기

직선 AP의 기울기 $f(t)=\dfrac{\frac{\ln t}{t}-1}{t-0}=\dfrac{\ln t-t}{t^2}$

$$\int_1^e f(t)dt=\int_1^e \frac{\ln t-t}{t^2}dt=\int_1^e\left(\frac{\ln t}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\int_1^e\frac{\ln t}{t^2}dt-\int_1^e\frac{1}{t}dt$$
$$=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{t^2}dt-\left[\ln t\right]_1^e$$
$$=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{t}\right]_1^e-1$$
$$=-\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}+1\right)-1=-\frac{2}{e}$$

따라서 $\int_1^e f(t)dt=-\frac{2}{e}$

27. [출제의도] 몫의 미분법 이해하기

$$g'(x)=\frac{f'(x)e^{f(x)}-\{f(x)+k\}f'(x)e^{f(x)}}{\{e^{f(x)}\}^2}$$
$$=\frac{f'(x)\{1-k-f(x)\}}{e^{f(x)}}$$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극대이므로 $g'(3)=0$
$f'(3)=0$ 또는 $f(3)=1-k$
함수 $f(x)$가 이차함수이므로 $f'(3)=0$이면
$k\neq 0$인 실수 k에 대하여
$f(3)\neq f(3-2k)$이므로 주어진 조건을
만족시키지 않는다.
그러므로 $f'(3)\neq 0$이고 $f(3)=1-k$
$g(3)=\frac{f(3)+k}{e^{f(3)}}=\frac{1}{e^{1-k}}=e^{k-1}$
$g(3)=e$이므로 $k=2$
$f(3)=f(-1)=-1$
그러므로 $f(x)+1=(x+1)(x-3)$
$f(x)=x^2-2x-4$, $f(2)=-4$
따라서 $g(k)=g(2)=\frac{f(2)+2}{e^{f(2)}}=-2e^4$

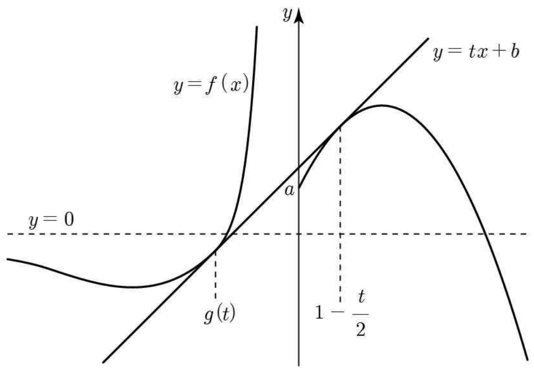
28. [출제의도] 함수의 그래프 추론하기

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\ln(-x)}{x^2} & (x<0)\\ -2x+2 & (x>0)\end{cases}$$
$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-3+2\ln(-x)}{x^3} & (x<0)\\ -2 & (x>0)\end{cases}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{-x}=0$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{\ln(-x)}{x}=\infty$$

$x<0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$-e$	$\cdots$	(0)
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	↘	변곡점	↖	극소	↙	

$0<t<2$인 t에 대하여 곡선 $y=\frac{\ln(-x)}{x}$와
직선 $y=tx+k$가 접할 때 k의 값을 b라 하자.
$x<0$에서 곡선 $y=\frac{\ln(-x)}{x}$와 직선
$y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수는
$$\begin{cases}k<b\text{일 때,} & 0\\ k=b\text{일 때,} & 1\\ k>b\text{일 때,} & 2\end{cases}$$
이다.
곡선 $y=-x^2+2x+a$ 위의 점 $(0,\ a)$에서
접선의 기울기는 2이므로
$k\geq a$인 모든 실수 k에 대하여
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=tx+k$가
만나는 서로 다른 점의 개수가 2이기 위해서는
곡선 $y=-x^2+2x+a\ (x\geq 0)$과
직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의
개수가
$$\begin{cases}a\leq k<b\text{일 때,} & 2\\ k=b\text{일 때,} & 1\\ k>b\text{일 때,} & 0\end{cases}$$
이어야 한다.
즉, 직선 $y=tx+b$가 두 곡선
$y=\frac{\ln(-x)}{x}\ (x<0)$, $y=-x^2+2x+a\,(x\geq 0)$
에 동시에 접할 때, $k\geq a$인 모든 실수 k에
대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와
직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의
개수는 2이다.



$x<0$에서 직선 $y=tx+b$는
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(g(t),\ f(g(t)))$에서의
접선이므로 $f'(g(t))=t$ ⋯ ㉠
$x>0$에서
$f'(x)=-2x+2=t$이므로 $f'\left(1-\frac{t}{2}\right)=t$
곡선 $y=-x^2+2x+a$ 위의
점 $\left(1-\frac{t}{2},\ a+1-\frac{t^2}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은
$y=tx+b$와 같다.
두 점 $(g(t),\ f(g(t)))$, $\left(1-\frac{t}{2},\ a+1-\frac{t^2}{4}\right)$을
지나는 직선의 기울기가 t이므로
$$t=\frac{\left(a+1-\frac{t^2}{4}\right)-f(g(t))}{\left(1-\frac{t}{2}\right)-g(t)}$$
$$t-\frac{t^2}{2}-t\times g(t)=a+1-\frac{t^2}{4}-f(g(t))$$
$$h(t)=a=f(g(t))-t\times g(t)-\frac{t^2}{4}+t-1$$
㉠에 의하여
$h'(t)$
$$=f'(g(t))\times g'(t)-g(t)-t\times g'(t)-\frac{t}{2}+1$$
$$=t\times g'(t)-g(t)-t\times g'(t)-\frac{t}{2}+1$$
$$=-g(t)-\frac{t}{2}+1$$
$g(t)+h'(t)=-\frac{t}{2}+1$
따라서 $g(1)+h'(1)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

[참고]
$f'(g(1))=1$에서 $\frac{1-\ln\{-g(1)\}}{\{g(1)\}^2}=1$
$g(1)=-1$, $h'(1)=\frac{3}{2}$

[다른 풀이]
$x\geq 0$에서 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 직선
$y=tx+k$의 접점을 $(s,\ -s^2+2s+a)$라 하면
접선의 방정식은
$y=(-2s+2)(x-s)-s^2+2s+a$
$=(-2s+2)x+s^2+a$
직선 $y=(-2s+2)x+s^2+a$가
직선 $y=tx+b$와 일치하므로
$t=-2s+2$, $b=s^2+a$에서
$h(t)=a=b-s^2$
$h'(t)=\frac{da}{dt}=\frac{db}{dt}-2s\frac{ds}{dt}$ ⋯ ㉠
점 $(g(t),\ f(g(t)))$는
직선 $y=tx+b$ 위의 점이므로
$f(g(t))=t\times g(t)+b$
양변을 t에 대하여 미분하면
$f'(g(t))g'(t)=g(t)+t\times g'(t)+\frac{db}{dt}$
$f'(g(t))=t$이므로 $\frac{db}{dt}=-g(t)$
$g(t)=-\frac{db}{dt}$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$g(t)+h'(t)=-2s\frac{ds}{dt}$
$x>0$일 때, 직선 $y=tx+b$가
곡선 $y=-x^2+2x+a$와
점 $(s,\ -s^2+2s+a)$에서 접하므로
$t=-2s+2$에서
$s=1-\frac{t}{2}$이고 $\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{2}$이므로
$t=1$일 때, $s=\frac{1}{2}$
따라서 $g(t)+h'(t)=-2s\frac{ds}{dt}$
$$=-2\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

29. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

$b_n=|a_n+1|-(a_n+1)$이라 하면
$$b_n=\begin{cases}0 & (a_n+1\geq 0)\\ -2(a_n+1) & (a_n+1<0)\end{cases}$$
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면
$a_n=a\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (단, n은 자연수)
모든 자연수 n에 대하여 $a_n\geq -1$이면
$b_n=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 $a\geq 3$
n이 홀수일 때, $b_n=0$
n이 짝수일 때, $a_n<-1$을 만족시키는

최대의 자연수 n을 N이라 하자.

(Ⅰ) $n>N$인 경우

$a_n+1\ge 0$이므로 $b_n=0$

(Ⅱ) $n\le N$인 경우

$a_n+1<0$이므로

$b_n=-2(a_n+1)$

$=-2\left\{a\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}-2$

이고

$a_N<-1\le a_{N+2}$

$a\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{N-1}<-1\le a\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{N+1}$

$-1\times(-2)^{N-1}<a\le -1\times(-2)^{N+1}$

$2^{N-1}<a\le 2^{N+1}$

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여 다음 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $N=2$인 경우

$2<a\le 2^3$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_2=-2(a_2+1)=a-2$

$a-2\le 2^3-2=6$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\le 6$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $N=4$인 경우

$2^3<a\le 2^5$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_2+b_4$

$=-2(a_2+1)-2(a_4+1)$

$=(a-2)+\left(\frac{1}{4}a-2\right)=\frac{5}{4}a-4$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{5}{4}a-4=26$에서 $a=24$

(ⅲ) $N\ge 6$인 경우

$a>2^5$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n>b_2+b_4=\frac{5}{4}a-4$

$\frac{5}{4}a-4>\frac{5}{4}\times 2^5-4=36$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n>36$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a=24$

등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 24이고 공비가 $-\frac{1}{2}$

$a_n=24\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{24}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=16$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=16$

30. [출제의도] 치환적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=\int_0^x e^{\cos\pi t}dt$에서 $f(0)=0$

$f'(x)=e^{\cos\pi x}$

모든 실수 x에 대하여

$f'(x+2)=f'(x)$ ⋯ ㉠

$f'(-x)=f'(x)$ ⋯ ㉡

㉠에 의하여

$f(x+2)=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

$f(2)=f(0)+C=C$이므로

$f(x+2)=f(x)+f(2)$

$f(2)=\int_0^2 e^{\cos\pi t}dt$

$=\int_0^2 f'(t)dt$

$=\int_0^1 f'(t)dt+\int_1^2 f'(t)dt$

$=f(1)+\int_{-1}^0 f'(t)dt$

㉡에 의하여 $\int_{-1}^0 f'(t)dt=\int_0^1 f'(t)dt$이므로

$f(2)=f(1)+\int_0^1 f'(t)dt$

$=f(1)+f(1)=2f(1)$

$h(g(t)+2)=2t^3+6f(1)t^2+1$

$x=g(t)+2$로 치환하면 $1=g'(t)\frac{dt}{dx}$

$g(t)=x-2$에서 $t=f(x-2)$

$x=3$일 때 $t=f(1)$

$x=7$일 때 $t=f(5)$

이고

$h'(g(t)+2)g'(t)=6t^2+12f(1)t$이므로

$\int_3^7\frac{h'(x)}{f(x)}dx=\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{h'(g(t)+2)}{f(g(t)+2)}g'(t)dt$

$=\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{6t^2+12f(1)t}{f(g(t))+f(2)}dt$

$=\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{6t\{t+2f(1)\}}{t+2f(1)}dt$

$=\int_{f(1)}^{f(5)}6tdt$

$=3\times\left[t^2\right]_{f(1)}^{f(5)}$

$=3\times\left[\{f(5)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$

$f(5)=f(3)+f(2)$

$=\{f(1)+f(2)\}+f(2)=5f(1)$

이므로

$\int_3^7\frac{h'(x)}{f(x)}dx=3\times\left[\{5f(1)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$

$=72\times\{f(1)\}^2$

따라서 $k=72$

[다른 풀이]

$g(f(x))=x$이므로

$h(x+2)=2\{f(x)\}^3+6f(1)\{f(x)\}^2+1$

$h'(x+2)=6\{f(x)\}^2f'(x)+12f(1)f(x)f'(x)$

$x=t+2$라 하면

$\int_3^7\frac{h'(x)}{f(x)}dx$

$=\int_1^5\frac{h'(t+2)}{f(t+2)}dt$

$=\int_1^5\frac{6\{f(t)\}^2f'(t)+12f(1)f(t)f'(t)}{f(t)+f(2)}dt$

$=\int_1^5\frac{6f(t)f'(t)\{f(t)+2f(1)\}}{f(t)+2f(1)}dt$

$=\int_1^5 6f(t)f'(t)dt$

$=3\times\left[\{f(5)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$

$f(5)=f(3)+f(2)$

$=\{f(1)+f(2)\}+f(2)=5f(1)$

이므로

$\int_3^7\frac{h'(x)}{f(x)}dx=3\times\left[\{5f(1)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$

$=72\times\{f(1)\}^2$

따라서 $k=72$