정답 및 해설

수학 영역

정답

1	③	2	⑤	3	②	4	①	5	⑤
6	③	7	④	8	④	9	②	10	②
11	①	12	③	13	①	14	③	15	④
16	②	17	⑤	18	④	19	①	20	③
21	⑤	22	28	23	21	24	3	25	6
26	88	27	16	28	12	29	720	30	163

해설

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A+B=(2x^2+xy+y^2)+(x^2+2xy-y^2)$
$=3x^2+3xy$

2. [출제의도] 두 행렬이 서로 같을 조건 계산하기

$a+1=4$, $b-1=8$ 이므로 $a=3$, $b=9$
따라서 $a\times b=27$

3. [출제의도] 복소수 계산하기

$\overline{z}=1-3i$ 이므로
$(z+\overline{z})i=\{(1+3i)+(1-3i)\}i=2i$

4. [출제의도] 항등식 이해하기

$ax^2+4ax+4a+1=2x^2+bx+9$
$a=2$, $b=4a=8$
따라서 $a+b=10$

5. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기

이차방정식 $x^2+4x+a-5=0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-a+5=0$
따라서 $a=9$

6. [출제의도] 이차부등식 이해하기

이차항의 계수가 1 이고 해가 $3\le x\le 5$ 인 이차부등식은 $(x-3)(x-5)\le 0$
$x^2-8x+15\le 0$ 이므로 $a=-8$, $b=15$
따라서 $b-a=23$

7. [출제의도] 합의 법칙 이해하기

a 는 1 이상 6 이하의 자연수이므로
$a^2+b\le 6$ 을 만족시키는 a 의 값은 1 또는 2 이다.
(i) $a=1$ 인 경우
$1^2+b\le 6$, $b\le 5$ 이므로
순서쌍 $(a,\ b)$ 는
$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$ 의 5 개
(ii) $a=2$ 인 경우
$2^2+b\le 6$, $b\le 2$ 이므로
순서쌍 $(a,\ b)$ 는 $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$ 의 2 개
(i), (ii)에 의하여 구하는 a, b 의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 개수는 $5+2=7$

8. [출제의도] 행렬의 곱셈 이해하기

$A^2=AA=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-4\\4&5\end{pmatrix}$
$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-3&-4\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-6\\6&7\end{pmatrix}$
$A^2+A^3=\begin{pmatrix}-3&-4\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&-6\\6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&-10\\10&12\end{pmatrix}$
따라서 행렬 A^2+A^3 의 모든 성분의 합은 4

9. [출제의도] 인수분해 이해하기

$x(x-4)(x^2-4x+7)+12$
$=(x^2-4x)(x^2-4x+7)+12$
$x^2-4x=X$ 라 하면 주어진 식은
$X(X+7)+12=X^2+7X+12$
$=(X+3)(X+4)$
$=(x^2-4x+3)(x^2-4x+4)$
$=(x-1)(x-3)(x-2)^2$
$a=-3$, $b=-2$
따라서 $2a+b=-8$

10. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$\begin{cases}2x-y=4 \cdots ㉠\\3x^2-xy-7y=3 \cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $y=2x-4$ 를 ㉡에 대입하면
$3x^2-x(2x-4)-7(2x-4)=3$
$x^2-10x+25=(x-5)^2=0$
$x=5$, $y=6$ 이므로 $\alpha=5$, $\beta=6$
따라서 $\alpha+\beta=11$

11. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기

조건 (가)에서
이차방정식 $x^2+kx+3k=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
$D_1=k^2-12k=k(k-12)<0$
$0<k<12 \cdots ㉠$
조건 (나)에서
이차방정식 $x^2-2(k-3)x+4k-7=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
$\frac{D_2}{4}=(k-3)^2-4k+7$
$=k^2-10k+16$
$=(k-2)(k-8)\ge 0$
$k\le 2$ 또는 $k\ge 8 \cdots ㉡$
㉠, ㉡에 의하여 $0<k\le 2$ 또는 $8\le k<12$
정수 k 는 1, 2, 8, 9, 10, 11
따라서 모든 정수 k 의 개수는 6

12. [출제의도] 행렬의 곱셈을 활용하여 실생활 문제 해결하기

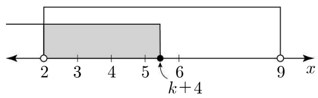
B 고등학교 남학생의 80%, 여학생의 30% 가 드럼을 배우므로
B 고등학교에서 드럼을 배우는 모든 학생 수는
$130\times 0.8+140\times 0.3$
PQ
$=\begin{pmatrix}120&160\\130&140\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.2&0.8\\0.7&0.3\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}120\times0.2+160\times0.7&120\times0.8+160\times0.3\\130\times0.2+140\times0.7&130\times0.8+140\times0.3\end{pmatrix}$
이므로 B 고등학교에서 드럼을 배우는 모든 학생 수는 행렬 PQ 의 $(2,\ 2)$ 성분이다.

13. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

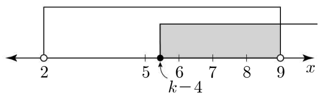
$B=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}9&2\\5&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&a\\b&-2\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8&2-a\\5-b&2\end{pmatrix}$
$AB=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&a\\b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&2-a\\5-b&2\end{pmatrix}$
$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-ab+5a+8&a+2\\10b-10&-ab+2b-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
$a=-2$, $b=1$
$B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8&4\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$
따라서 행렬 B 의 모든 성분의 합은 9

14. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

부등식 $|x-k|\le 4$ 에서
$-4\le x-k\le 4$, $k-4\le x\le k+4 \cdots ㉠$
부등식 $x^2-11x+18<0$ 에서
$(x-2)(x-9)<0$, $2<x<9 \cdots ㉡$
(i) $2<k+4<9$ 인 경우



㉠, ㉡을 만족시키는 정수 x 의 개수가 3 이 되도록 하는 k 의 값의 범위는
$5\le k+4<6$, $1\le k<2$
정수 k 는 1
(ii) $2<k-4<9$ 인 경우



㉠, ㉡을 만족시키는 정수 x 의 개수가 3 이 되도록 하는 k 의 값의 범위는
$5<k-4\le 6$, $9<k\le 10$
정수 k 는 10
(i), (ii)에 의하여 모든 정수 k 의 값의 합은
$1+10=11$

15. [출제의도] 인수정리를 활용하여 문제 해결하기

$P(x)=x^4+x^3+2x-4=(x-1)(x+2)(x^2+2)$
$P(x)$ 가 $x-1$, $x+2$ 로 나누어떨어지므로
$b=-1$ 또는 $b=2$
(i) $b=-1$ 인 경우
$Q(x)$ 가 $x-1$ 로 나누어떨어지므로
$Q(1)=a+2=0$, $a=-2$
(ii) $b=2$ 인 경우
$Q(x)$ 가 $x+2$ 로 나누어떨어지므로
$Q(-2)=4a+5=0$
$a=-\frac{5}{4}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 $a=-2$, $b=-1$
$P(b)+Q(a)=P(-1)+Q(-2)=-6+3=-3$

16. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하자.
이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4b>0$ ⋯ ㉠
이차방정식 $f(x)=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $b=4$
이차방정식 $x^2+ax+4=-x+1$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-(a+1)$, $\alpha\beta=3$
$|\alpha-\beta|=2$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(a+1)^2-12=4$
$(a+1)^2=16$
$a=-5$ 또는 $a=3$
㉠에 의하여 $a=-5$
$f(x)=x^2-5x+4$
따라서 $f(6)=10$

17. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 $f(x)-g(x)=3x(x-2)+3$
$g(x)=12x+a$ (단, a는 상수)라 하면
$f(x)+g(x)=\{f(x)-g(x)\}+2g(x)$
$=3x(x-2)+3+24x+2a$
$=3x^2+18x+2a+3$
조건 (나)에서
이차방정식 $f(x)+g(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9^2-3(2a+3)=-6a+72=0$, $a=12$
$g(x)=12x+12$
$f(x)=3x^2-6x+3+12x+12=3x^2+6x+15$
따라서 $f(3)=60$

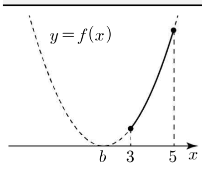
18. [출제의도] 삼차방정식을 활용하여 문제 해결하기

$x^3-6x^2+(k+8)x-2k=(x-2)(x^2-4x+k)$
이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 실근을 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 하자.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$x_1+x_2=4$이므로
$x_1<2<x_2$
$\beta=2$, $x_1=\alpha$, $x_2=\gamma$
$\alpha+\gamma=4$, $\alpha\gamma=k$
$2\alpha+\beta=2\gamma$이므로
$\beta=2\gamma-2\alpha=2(\gamma-\alpha)=2$
$\gamma-\alpha=1$
$(\gamma-\alpha)^2=(\gamma+\alpha)^2-4\gamma\alpha$
$1=16-4k$
따라서 $k=\frac{15}{4}$

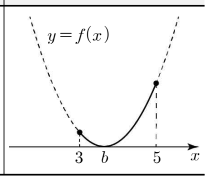
19. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 추론하기

양수 b의 값의 범위에 따라 $3\le x\le 5$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

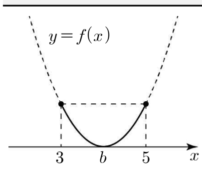
(ⅰ) $0<b\le 3$



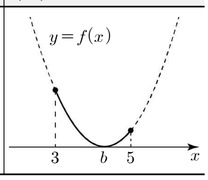
(ⅱ) $3<b<4$



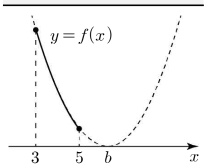
(ⅲ) $b=4$



(ⅳ) $4<b<5$



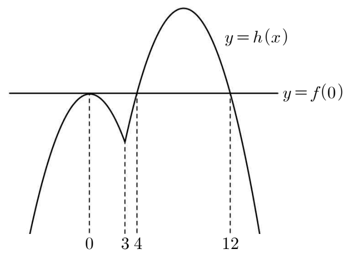
(ⅴ) $b\ge 5$



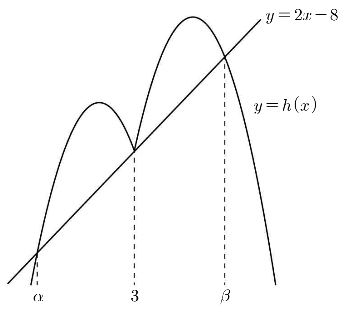
(ⅰ) $0<b\le 3$인 경우
$g(3)=f(5)-f(3)=a(5-b)^2-a(3-b)^2$
$=4a(4-b)$
$g(3)>a$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $3<b<4$인 경우
$g(3)=f(5)-f(b)=a(5-b)^2$
$g(3)>a$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $b=4$인 경우
$g(3)=f(5)-f(b)=a(5-4)^2=a$
(ⅳ) $4<b<5$인 경우
$g(3)=f(3)-f(b)=a(3-b)^2$
$g(3)>a$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(ⅴ) $b\ge 5$인 경우
$g(3)=f(3)-f(5)=a(3-b)^2-a(5-b)^2$
$=4a(b-4)$
$g(3)>a$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여
$b=4$, $f(x)=a(x-4)^2$
조건 (나)에서
$g(2)+g(6)=f(2)-f(4)+f(8)-f(6)$
$=f(8)=16a=32$
$a=2$, $f(x)=2(x-4)^2$
따라서 $f(6)=8$

20. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 추론하기

$f(3)=g(3)$과 조건 (가)에 의하여
함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$f(0)=b$ (단, b는 상수)라 하면
$f(x)=ax^2+b$, $g(x)=a(x-4)(x-12)+b$
조건 (나)에 의하여 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이차방정식 $f(x)=2x-8$의 두 실근은 α, 3
$ax^2-2x+b+8=0$ ⋯ ㉠
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+3=\frac{2}{a}$ ⋯ ㉡
이차방정식 $g(x)=2x-8$의 두 실근은 3, β
$ax^2-(16a+2)x+48a+b+8=0$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$3+\beta=16+\frac{2}{a}$ ⋯ ㉢
㉡, ㉢에서 $\alpha+\beta+6=16+\frac{4}{a}$, $a=-1$
$a=-1$, $x=3$을 ㉠에 대입하면 $b=7$
$f(x)=-x^2+7$, $g(x)=-x^2+16x-41$
따라서 $h(-2)+h(5)=f(-2)+g(5)=17$

21. [출제의도] 조합을 활용하여 문제 해결하기

규칙 (가), (나)에 의하여 A와 B를 활동하는 요일을 선택하는 경우는 다음과 같이 세 가지이다.
(ⅰ) A를 2일, B를 2일 활동하는 경우
A와 B를 활동하는 경우의 수는
${}_5C_2\times{}_3C_2=10\times3=30$
① C를 2일 활동하는 경우
C는 B를 활동하는 요일 중 하루를 선택하여 활동하고, A와 B를 활동하지 않는 요일에 활동한다. 그리고 D는 남은 4일에 활동한다.
경우의 수는 $({}_2C_1\times{}_1C_1)\times{}_4C_4=2$
② C를 3일 활동하는 경우
C는 B를 활동하는 요일 중 하루를 선택하여 활동하고, A와 B를 활동하지 않는 요일에 활동하고, A를 활동하는 요일 중 하루를 선택하여 활동한다. 그리고 D는 남은 3일에 활동한다.
경우의 수는 $({}_2C_1\times{}_1C_1\times{}_2C_1)\times{}_3C_3=4$

③ C를 4일 활동하는 경우
C는 B를 활동하는 요일 중 하루를 선택하여 활동하고, A와 B를 활동하지 않는 요일에 활동하고, A를 활동하는 2일에 활동한다. 그리고 D는 남은 2일에 활동한다.
경우의 수는 $({}_2C_1 \times {}_1C_1 \times {}_2C_2) \times {}_2C_2 = 2$
①, ②, ③에 의하여 구하는 경우의 수는
$30 \times (2+4+2) = 240$

(ii) A를 2일, B를 3일 활동하는 경우
A와 B를 활동하는 경우의 수는
${}_5C_2 \times {}_3C_3 = 10$

① C를 2일 활동하는 경우
C는 B를 활동하는 요일 중 하루를 선택하여 활동하고, A를 활동하는 요일 중 하루를 선택하여 활동한다. 그리고 D는 남은 3일에 활동한다.
경우의 수는 $({}_3C_1 \times {}_2C_1) \times {}_3C_3 = 6$
② C를 3일 활동하는 경우
C는 B를 활동하는 요일 중 하루를 선택하여 활동하고, A를 활동하는 2일에 활동한다. 그리고 D는 남은 2일에 활동한다.
경우의 수는 $({}_3C_1 \times {}_2C_2) \times {}_2C_2 = 3$
①, ②에 의하여 구하는 경우의 수는
$10 \times (6+3) = 90$

(iii) A를 3일, B를 2일 활동하는 경우
A와 B를 활동하는 경우의 수는
${}_5C_3 \times {}_2C_2 = 10$
① C를 2일 활동하는 경우
C는 B를 활동하는 요일 중 하루를 선택하여 활동하고, A를 활동하는 요일 중 하루를 선택하여 활동한다. 그리고 D는 남은 3일에 활동한다.
경우의 수는 $({}_2C_1 \times {}_3C_1) \times {}_3C_3 = 6$
② C를 3일 활동하는 경우
C는 B를 활동하는 요일 중 하루를 선택하여 활동하고, A를 활동하는 요일 중 2일을 선택하여 활동한다. 그리고 D는 남은 2일에 활동한다.
경우의 수는 $({}_2C_1 \times {}_3C_2) \times {}_2C_2 = 6$
①, ②에 의하여 구하는 경우의 수는
$10 \times (6+6) = 120$

(i), (ii), (iii)에 의하여 스포츠 활동 신청서를 작성하는 경우의 수는 $240+90+120=450$

22. [출제의도] 순열과 조합의 수 계산하기

${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$, ${}_4C_3 = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$
따라서 ${}_4P_3 + {}_4C_3 = 24 + 4 = 28$

23. [출제의도] 연립일차부등식 계산하기

$3x \le x + 16$ 에서 $x \le 8$ ⋯ ㉠
$x + 8 \le 4x - 10$ 에서 $x \ge 6$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $6 \le x \le 8$
정수 x는 6, 7, 8
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 21

24. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$B = \dfrac{1}{3}\{(A+B)-(A-2B)\}$
$= \dfrac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$
따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은 3

25. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$P(x) = x^2 + ax + b$ (단, a, b는 상수)라 하자.
나머지정리에 의하여
$P(1) = 1 + a + b = 2$, $a + b = 1$ ⋯ ㉠
$P(2) = 4 + 2a + b = 3$, $2a + b = -1$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a = -2$, $b = 3$

$P(x) = x^2 - 2x + 3$
따라서 $P(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는
$P(3) = 6$

26. [출제의도] 합의 법칙과 곱의 법칙을 활용하여 문제 해결하기

조건 (나)에 의하여 백의 자리의 수와 일의 자리의 수는 모두 홀수인 자연수이다.
(i) 백의 자리의 수가 7인 경우
십의 자리의 수는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9
일의 자리의 수는 1, 3, 5, 9
조건을 만족시키는 세 자리 자연수의 개수는
$9 \times 4 = 36$
(ii) 십의 자리의 수가 7인 경우
백의 자리의 수는 1, 3, 5, 9
일의 자리의 수는 1, 3, 5, 9
조건을 만족시키는 세 자리 자연수의 개수는
$4 \times 4 = 16$
(iii) 일의 자리의 수가 7인 경우
백의 자리의 수는 1, 3, 5, 9
십의 자리의 수는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9
조건을 만족시키는 세 자리 자연수의 개수는
$4 \times 9 = 36$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 세 자리 자연수의 개수는 $36 + 16 + 36 = 88$

27. [출제의도] 나머지정리를 활용하여 문제 해결하기

다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나눈 나머지
$2f(x) + 6x^2 - 4$는 일차식 또는 상수항이어야 하므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 -3인 이차식이다.
$f(x) = -3x^2 + bx + c$ (단, b, c는 상수)
$\{f(x)\}^2 - 2f(x) + 3$을 $x^2 - 4x - 5$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$\{f(x)\}^2 - 2f(x) + 3$
$= (x^2 - 4x - 5)Q(x) + 2$
$= (x+1)(x-5)Q(x) + 2$ ⋯ ㉠
㉠에 $x = -1$을 대입하면
$\{f(-1)\}^2 - 2f(-1) + 3 = 2$
$\{f(-1)\}^2 - 2f(-1) + 1 = \{f(-1) - 1\}^2 = 0$
$f(-1) = 1$, $-3 - b + c = 1$ ⋯ ㉡
㉠에 $x = 5$를 대입하면
$\{f(5)\}^2 - 2f(5) + 3 = 2$
$\{f(5)\}^2 - 2f(5) + 1 = \{f(5) - 1\}^2 = 0$
$f(5) = 1$, $-75 + 5b + c = 1$ ⋯ ㉢
㉡, ㉢에 의하여 $b = 12$, $c = 16$
$f(x) = -3x^2 + 12x + 16$
$f(x) = (x-a)^2 \times (-3) + 2f(x) + 6x^2 - 4$
$f(a) = 2f(a) + 6a^2 - 4$
$f(a) + 6a^2 - 4 = -3a^2 + 12a + 16 + 6a^2 - 4$
$= 3(a+2)^2 = 0$
$a = -2$
따라서 $f(a^2) = f(4) = 16$

28. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 문제 해결하기

$f(x) = \dfrac{1}{2}x(x-4)$ 이므로 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 0)$
직선 l_1의 방정식은 $y = mx$
$\dfrac{1}{2}x(x-4) = mx$, $x(x - 2m - 4) = 0$
$x = 0$ 또는 $x = 2m + 4$
$B(2m+4,\ 2m(m+2))$, $D(2m+4,\ 0)$
직선 l_2의 방정식은 $y = m(x-4)$
$\dfrac{1}{2}x(x-4) = m(x-4)$, $(x-4)(x-2m) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = 2m$
$C(2m,\ 2m(m-2))$, $E(2m,\ 0)$
$S_1 = \dfrac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{EC}$
$= \dfrac{1}{2} \times (4 - 2m) \times \{-2m(m-2)\}$
$= 2m(m-2)^2$
$S_2 = \dfrac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{DB}$
$= \dfrac{1}{2} \times 2m \times 2m(m+2)$
$= 2m^2(m+2)$
$S_1 - S_2 = 2m(m-2)^2 - 2m^2(m+2)$
$= -12m^2 + 8m$
$= -12\left(m - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{4}{3}$ $(0 < m < 2)$
$S_1 - S_2$는 $m = \dfrac{1}{3}$일 때, 최댓값 $\dfrac{4}{3}$를 갖는다.
$p = 3$, $q = 4$
따라서 $p \times q = 12$

29. [출제의도] 순열을 활용하여 문제 해결하기

$A + B + C$가 5의 배수가 되기 위해서는 정수 m에 대하여 $a_3 + a_5 + a_6 = 5m$이어야 한다.
$A - B - C$가 5의 배수가 되기 위해서는 정수 n에 대하여 $a_3 - (a_5 + a_6) = 5n$이어야 한다.
$(a_3 + a_5 + a_6) + \{a_3 - (a_5 + a_6)\} = 5(m+n)$
$2a_3 = 5(m+n)$
a_3이 5의 배수이므로 $a_3 = 5$
$5 + a_5 + a_6 = 5m$, $5 - (a_5 + a_6) = 5n$ 이므로
$a_5 + a_6$은 5 또는 10 또는 15
(i) $a_5 + a_6 = 5$인 경우
순서쌍 $(a_5,\ a_6)$은
$(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$의 4개
순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_4)$의 개수는 ${}_5P_3 = 60$
순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6)$의 개수는
$4 \times 60 = 240$

(ii) $a_5+a_6=10$ 인 경우

순서쌍 $(a_5,\ a_6)$은

$(2,\ 8)$, $(3,\ 7)$, $(4,\ 6)$, $(6,\ 4)$, $(7,\ 3)$, $(8,\ 2)$의 6개

순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_4)$의 개수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$

순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6)$의 개수는

$6\times 60=360$

(iii) $a_5+a_6=15$ 인 경우

순서쌍 $(a_5,\ a_6)$은 $(7,\ 8)$, $(8,\ 7)$의 2개

순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_4)$의 개수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$

순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6)$의 개수는

$2\times 60=120$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6)$의 개수는

$240+360+120=720$

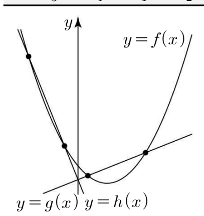
30. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 추론하기

조건에 의하여 두 방정식 $f(x)-g(x)=0$, $f(x)-h(x)=0$이 모두 실근을 가져야 한다.

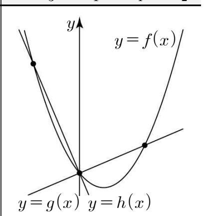
(i) $f(x)-g(x)=0$과 $f(x)-h(x)=0$이 모두 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 x_1, $x_2\ (x_1<x_2)$라 하고, $f(x)-h(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 x_3, $x_4\ (x_3<x_4)$라 하면, 네 수 x_1, x_2, x_3, x_4의 대소 관계에 따른 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

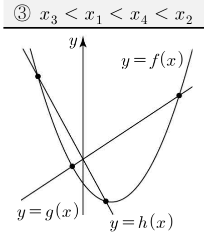
① $x_3<x_4<x_1<x_2$



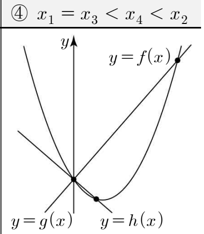
② $x_3<x_1=x_4<x_2$



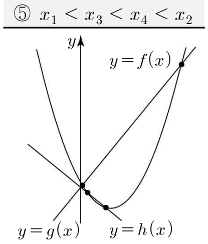
③ $x_3<x_1<x_4<x_2$



④ $x_1=x_3<x_4<x_2$



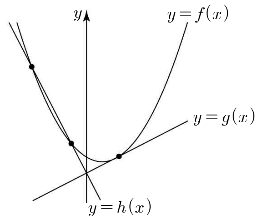
⑤ $x_1<x_3<x_4<x_2$



①~⑤인 경우는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)-g(x)=0$이 중근, $f(x)-h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$f(x)-g(x)=0$의 중근을 x_1이라 하고, $f(x)-h(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 x_2, $x_3\ (x_2<x_3)$이라 하자.

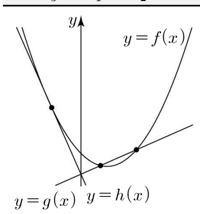


$x_2<x_3<x_1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

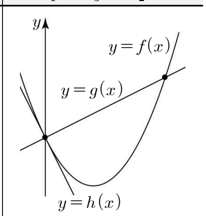
(iii) $f(x)-g(x)=0$이 서로 다른 두 실근, $f(x)-h(x)=0$이 중근을 갖는 경우

$f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 x_1, $x_2\ (x_1<x_2)$라 하고, $f(x)-h(x)=0$의 중근을 x_3이라 하면, 세 수 x_1, x_2, x_3의 대소 관계에 따른 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

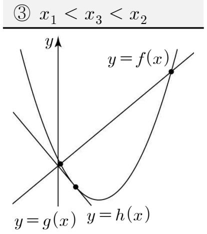
① $x_3<x_1<x_2$



② $x_1=x_3<x_2$



③ $x_1<x_3<x_2$



①, ③인 경우는 조건을 만족시키지 않는다.

② $x_1=x_3<x_2$인 경우

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\}$

$=\dfrac{1}{16}(x-x_1)^3(x-x_2)$

$x_1=x_3=0,\ \alpha=0$

$f(0)=g(0)=7$이므로 $a=3$

$f(x)=\dfrac{1}{4}(x-4)^2+3$

$f(x)-h(x)=0$에서

$\dfrac{1}{4}(x-4)^2+3+\dfrac{1}{b}x-7=0$

$\dfrac{1}{4}x^2+\left(\dfrac{1}{b}-2\right)x=0$은 중근 0을 가지므로

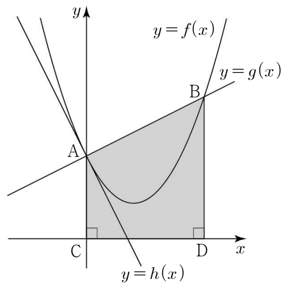
$b=\dfrac{1}{2}$

$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{4}(x-4)^2+3-\dfrac{1}{2}x-7$

$=\dfrac{1}{4}x(x-10)$

$x_2=10,\ \beta=10$

$\mathrm{A}(0,\ 7)$, $\mathrm{B}(10,\ 12)$, $\mathrm{C}(0,\ 0)$, $\mathrm{D}(10,\ 0)$

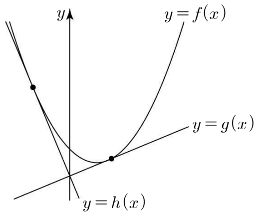


사각형 ACDB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(7+12)\times 10=95$

(iv) $f(x)-g(x)=0$, $f(x)-h(x)=0$이 모두 중근을 갖는 경우

$f(x)-g(x)=0$의 중근을 x_1, $f(x)-h(x)=0$의 중근을 x_2라 하자.



$x_2<x_1$이므로

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\}$

$=\dfrac{1}{16}(x-x_1)^2(x-x_2)^2$

$f(x)-g(x)=0$에서

$\dfrac{1}{4}(x-4)^2+a-bx-7=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(b+2)^2-a+3=0\ \cdots$ ㉠

$f(x)-h(x)=0$에서

$\dfrac{1}{4}(x-4)^2+a+\dfrac{1}{b}x-7=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\left(\dfrac{1}{b}-2\right)^2-a+3=0\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=8$, $b=-2+\sqrt{5}\ (b>0)$

$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{4}(x-2\sqrt{5})^2=0$

$x_1=2\sqrt{5}$, $\beta=2\sqrt{5}$

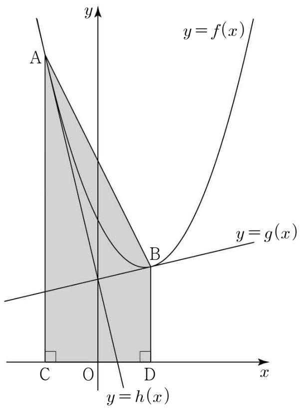
$f(x)-h(x)=\dfrac{1}{4}(x+2\sqrt{5})^2=0$,

$x_2=-2\sqrt{5}$, $\alpha=-2\sqrt{5}$

$\mathrm{A}(-2\sqrt{5},\ 17+4\sqrt{5})$,

$\mathrm{B}(2\sqrt{5},\ 17-4\sqrt{5})$, $\mathrm{C}(-2\sqrt{5},\ 0)$,

$\mathrm{D}(2\sqrt{5},\ 0)$



사각형 ACDB 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(17+4\sqrt{5}+17-4\sqrt{5})\times 4\sqrt{5}=68\sqrt{5}$

(i)~(iv)에 의하여

$M=68\sqrt{5}$, $m=95$ 이고 $M+m=95+68\sqrt{5}$

$p=95$, $q=68$

따라서 $p+q=163$