

수학 영역

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBS에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정답

1	④	2	③	3	⑤	4	①	5	②
6	⑤	7	②	8	④	9	①	10	①
11	②	12	③	13	⑤	14	④	15	⑤
16	③	17	③	18	④	19	②	20	①
21	①	22	3	23	55	24	5	25	16
26	432	27	10	28	98	29	133	30	25

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$2^3 \times 4^{-\frac{1}{2}} = 2^3 \times (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^3 \times 2^{-1} = 2^2 = 4$$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{(x+1)^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$$

3. [출제의도] 등차수열 계산하기

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
 a_2 는 두 항 a_1, a_3 의 등차중항이므로
 $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = 8$
 공차가 5이므로
 $a_4 = a_2 + 2 \times 5 = 8 + 10 = 18$

4. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서
 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ 일 때,
 $\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$
 $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 또는 $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로 $\sin \theta < 0$
 $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$$

6. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta = 18\theta = 15\pi$$

$$\theta = \frac{5}{6}\pi$$

7. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

두 점 $A(2, \log_a 2), B(4, \log_a 4)$ 를 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{\log_a 4 - \log_a 2}{4 - 2} = \frac{\log_a 2}{2} = -\frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$\log_a 2 = -\frac{1}{2}, a^{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$a = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

8. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 계산하기

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$\sum_{k=1}^8 a_k = \frac{1}{3} \times \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{22} \right) + \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{25} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{25} \right) = \frac{8}{25}$$

9. [출제의도] 로그가 포함된 부등식 이해하기

$\log(x-1), \log(x+2)$ 가 정의되기 위해서는 $x-1 > 0$ 이고 $x+2 > 0$ 이어야 한다.
 그러므로 $x > 1 \dots \textcircled{1}$
 $\log(x-1) + \log(x+2) \leq 1$
 $\log(x-1)(x+2) \leq \log 10$
 $(x-1)(x+2) \leq 10$
 $x^2 + x - 12 \leq 0$
 $-4 \leq x \leq 3 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $1 < x \leq 3$ 이므로
 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 2, 3이고
 그 값의 합은 5

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y = \sin \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($0 \leq x < 4\pi$)의
 그래프와 x 축이 만나는 점의
 x 좌표를 t ($0 \leq t < 4\pi$)라 하면
 $\sin \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \sin \frac{t}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $0 \leq \frac{t}{2} < 2\pi$ 이므로 $\frac{t}{2} = \frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{t}{2} = \frac{5}{3}\pi$
 $t = \frac{8}{3}\pi$ 또는 $t = \frac{10}{3}\pi$
 선분 AB의 길이는
 $\frac{10}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$

11. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x) = \log_2(x+a) + b$ 의 그래프가 두 점
 $(0, -2), (3, 0)$ 을 지나므로
 $\log_2 a + b = -2 \dots \textcircled{1}$
 $\log_2(3+a) + b = 0 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $\log_2(3+a) - \log_2 a = 2$
 $\log_2(3+a) = \log_2 4a$

$$a = 1, b = -2$$

$$\text{함수 } f(x) = \log_2(x+1) - 2$$

$$f(15) = \log_2(15+1) - 2 = 2$$

12. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 할 때,
 $S_n = \frac{n(2a + (n-1)(-4))}{2}$
 $= n(a - 2(n-1))$
 $S_{12} = 12(a - 22) = 0, a = 22$
 $S_n = n(-2n + 24) = -2n^2 + 24n$
 $= -2(n-6)^2 + 72$
 $n = 6$ 일 때, S_n 의 최댓값은 72

13. [출제의도] 로그 이해하기

$a^3 = b^2 = k$ (k 는 1이 아닌 양수)라 하면
 $a = k^{\frac{1}{3}}, b = k^{\frac{1}{2}}$
 $\log_a c = \log_{k^{\frac{1}{3}}} c = 3\log_k c,$
 $\log_b c = \log_{k^{\frac{1}{2}}} c = 2\log_k c$ 이므로
 $\log_a c = \log_b c + 1$ 에서
 $3\log_k c = 2\log_k c + 1$
 $\log_k c = 1, c = k$
 $\log_c ab = \log_k k^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{2}} = \log_k k^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}$

14. [출제의도] 거듭제곱근을 활용하여 문제 해결하기

2 이상의 자연수 n 에 대하여
 (i) n 이 홀수인 경우
 $n^2 - 12n + 27 \geq 0$ 이면 $f(n) = 0$
 $n^2 - 12n + 27 < 0$ 이면 $f(n) = 1$
 (ii) n 이 짝수인 경우
 $n^2 - 12n + 27 > 0$ 이면 $f(n) = 1$
 $n^2 - 12n + 27 \leq 0$ 이면 $f(n) = 0$
 $n^2 - 12n + 27 = (n-3)(n-9)$ 이므로
 (i), (ii)에 의하여
 $\sum_{n=2}^{20} f(n) = f(2) + f(5) + f(7) + f(10) + f(12)$
 $+ f(14) + f(16) + f(18) + f(20) = 9$

15. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

자연수 n 에 대하여 두 점 A_n, B_n 의 x 좌표를
 각각 α_n, β_n ($\alpha_n < \beta_n$)이라 하면
 α_n, β_n 은 x 에 대한 방정식
 $x^2 - nx - 2n^2 = x + n$ 의 실근이다.
 $x^2 - (n+1)x - n(2n+1) = 0$
 $(x+n)(x-2n-1) = 0$ 에서
 $\alpha_n = -n, \beta_n = 2n+1$
 두 점 $A_n(-n, 0), B_n(2n+1, 3n+1)$ 에
 대하여 점 B_n 에서 직선 OA_n 에 내린
 수선의 발을 H_n 이라 하면
 $H_n(2n+1, 0)$
 $S_n = \frac{1}{2} \times \overline{OA_n} \times \overline{B_n H_n}$
 $= \frac{1}{2} \times n \times (3n+1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

따라서 $\sum_{k=1}^4 S_k = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}k \right)$
 $= \frac{3}{2} \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 5}{2}$
 $= 50$

16. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

(i) $0 < x \leq \frac{1}{3}$ 인 경우

$0 < x < 3x \leq 1$ 이므로
 $f(x) + f(3x) = \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} 3x$
 $= \log_{\frac{1}{3}} 3x^2 = 3$

$3x^2 = \frac{1}{27}$

$x = -\frac{1}{9}$ 또는 $x = \frac{1}{9}$

$0 < x \leq \frac{1}{3}$ 이므로 $x = \frac{1}{9}$

(ii) $\frac{1}{3} < x \leq 1$ 인 경우

$\frac{1}{3} < x \leq 1 < 3x$ 이므로

$f(x) + f(3x) = \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 3x$
 $= \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 3 + \log_3 x = 1$

이므로 방정식 $f(x) + f(3x) = 3$ 의 실근은 존재하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 인 경우

$1 < x < 3x$ 이므로

$f(x) + f(3x) = \log_3 x + \log_3 3x$
 $= \log_3 3x^2 = 3$

$3x^2 = 27$

$x = -3$ 또는 $x = 3$

$x > 1$ 이므로 $x = 3$

(i) ~ (iii)에 의하여

방정식 $f(x) + f(3x) = 3$ 의 모든 실근은

$\frac{1}{9}, 3$ 이고 그 합은 $\frac{28}{9}$

17. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

점 P의 좌표는 $P(t, t^2)$

점 Q의 좌표는 $Q(t, \sqrt{t})$

점 A에서 직선 $x=t$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(t, 1)$

$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{AH}$
 $= \frac{1}{2} \times (t^2 - \sqrt{t}) \times (t-1)$

$\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{S(t)}{(t-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{(t^2 - \sqrt{t})(t-1)}{2(t-1)^2}$
 $= \frac{1}{2} \times \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{(t^4 - t)}{(t-1)(t^2 + \sqrt{t})}$
 $= \frac{1}{2} \times \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t(t-1)(t^2 + t + 1)}{(t-1)(t^2 + \sqrt{t})}$
 $= \frac{1}{2} \times \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t(t^2 + t + 1)}{t^2 + \sqrt{t}} = \frac{3}{4}$

18. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

$a \cos\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) = a \cos b\left(x - \frac{\pi}{4b}\right)$ 이므로

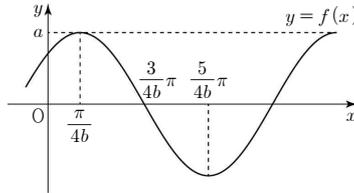
함수 $f(x) = a \cos\left(bx - \frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는

함수 $y = a \cos bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\frac{\pi}{4b}$ 만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

함수 $y = a \cos bx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$0 \leq x \leq \pi$ 에서

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 음수이므로

$\frac{3}{4b}\pi < \pi \dots \textcircled{1}$

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4이므로 $a = 4$

$\frac{5}{4b}\pi \leq \pi$ 일 때,

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -4 ($\neq -2\sqrt{2}$)이므로

$\pi < \frac{5}{4b}\pi \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 가

$x = \pi$ 일 때, 최솟값 $-2\sqrt{2}$ 를 갖는다.

$\frac{3}{4b}\pi < \pi < \frac{5}{4b}\pi$ 이므로 $\frac{\pi}{2} < b\pi - \frac{\pi}{4} < \pi$

$f(\pi) = 4 \cos\left(b\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}$

$\cos\left(b\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$b\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi, b = 1$

$a + b = 5$

19. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

두 점 A, B는 곡선 $y = 3^x + b$ 위의 점이다.

$b > 0$ 이므로 곡선 $y = 3^x + b$ 는

직선 $y = x$ 와 만나지 않는다.

점 B를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한

점을 $B'(3^{a+3} + b, a+3)$ 이라 하자.

$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'}$ 이므로

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값은 점 P가 직선 AB' 과

직선 $y = x$ 의 교점일 때 최소이다.

직선 AB' 과 직선 $y = x$ 의 교점을 P_0 이라 하면

$\overline{AP_0} + \overline{BP_0} = \overline{AP_0} + \overline{B'P_0} = \overline{AB'} = 55$

점 C의 y 좌표가 $a+3$ 이므로

$\log_3(x - a - b) = a + 3, x = 3^{a+3} + a + b$

$C(3^{a+3} + a + b, a + 3)$ 이다.

점 C는 점 B' 을 x 축의 방향으로 a ($a > 0$)만큼

평행이동한 점과 일치하므로 $\overline{B'C} = a$ 이고

직선 $B'C$ 는 x 축과 평행하다.

$\overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AC}$ 이므로

점 B' 은 선분 AC 위의 점이고

직선 AB' 은 x 축과 평행하다.

$3^a + b = a + 3 \dots \textcircled{1}$

$\overline{AB'} = 55$ 이므로

$3^{a+3} + b - a = 55 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $3^{a+3} - 3^a = 52$

$3^a = 2, a = \log_3 2, b = a + 1$

$a + b = 2a + 1 = \log_3 12$

20. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

(I) a_2 가 홀수인 경우

조건 (나)에 의하여

$a_3 = \frac{a_2 + 3}{2} \geq a_2$ 이므로 $a_2 \leq 3$

① $a_2 = 1$ 인 경우

$a_3 = 2, a_4 = 3$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $a_2 = 3$ 인 경우

$a_3 = 3, a_4 = 3, a_5 = 3, \dots$

$a_1 = 3$ 또는 $a_1 = 2$

(II) a_2 가 짝수인 경우

① $a_2 = 4k$ (k 는 자연수)인 경우

$a_3 = 6k, a_4 = 9k$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $a_2 = 4k - 2$ (k 는 자연수)인 경우

$a_3 = 6k - 3, a_4 = 3k$

(i) k 가 홀수인 경우

$a_5 = \frac{3k+3}{2}, a_4 + a_5 = \frac{9k+3}{2} \leq 24$

$k \leq 5$ 이므로 $k = 1, 3, 5$

③ $k = 1$ 인 경우

$a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 3, a_5 = 3, \dots$

$a_1 = 1$ 또는 $a_1 = \frac{4}{3}$

조건에 의하여 $a_1 = 1$

④ $k = 3$ 인 경우

$a_2 = 10, a_3 = 15$

$a_1 = 17$ 또는 $a_1 = \frac{20}{3}$

조건을 만족시키지 않는다.

⑤ $k = 5$ 인 경우

$a_2 = 18, a_3 = 27, a_4 = 15, a_5 = 9,$

$a_6 = 6, a_7 = 9, a_8 = 6, \dots$

$a_1 = 33$ 또는 $a_1 = 12$

조건 (나)에 의하여 $a_1 = 12$

(ii) k 가 짝수인 경우

$a_5 = \frac{9}{2}k, a_4 + a_5 = \frac{15}{2}k \leq 24$

$k \leq \frac{16}{5}$ 이므로 $k = 2$

$a_2 = 6, a_3 = 9, a_4 = 6, a_5 = 9, \dots$

$a_1 = 9$ 또는 $a_1 = 4$

(I), (II)에 의하여

a_1 의 값은 1, 2, 3, 4, 9, 12 이고 그 합은 31

[참고]

조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	...
1	2	3	3	3	3	3	...
2	3	3	3	3	3	3	...
3	3	3	3	3	3	3	...
4	6	9	6	9	6	9	...
9	6	9	6	9	6	9	...
12	18	27	15	9	6	9	...

21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을
활용하여 문제 해결하기

∠ADB, ∠ACB는 호 AB에 대한
원주각이므로
∠ADB = ∠ACB ... ㉠
∠ABD, ∠ACD는 호 AD에 대한
원주각이므로
∠ABD = ∠ACD ... ㉡
선분 AC가 삼각형 BCD에 내접하는 원 C₂의
넓이를 이등분하므로
∠ACB = ∠ACD
㉠, ㉡에 의하여
∠ABD = ∠ADB이므로
삼각형 ABD는 이등변삼각형이다.
 $\overline{AB} = \overline{AD} = 2$

∠ACB = θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하면
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 이므로
 $\cos \theta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$
 $\overline{BC} = x$ 라 하면
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + x^2 - 2 \times \overline{AC} \times x \times \cos \theta$
 $4 = 7 + x^2 - 2 \times \sqrt{7} \times x \times \frac{2\sqrt{7}}{7}$
 $x^2 - 4x + 3 = 0$, $(x-1)(x-3) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = 3$

$\overline{CD} = y$ 라 하면
삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여
 $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + y^2 - 2 \times \overline{AC} \times y \times \cos \theta$
 $4 = 7 + y^2 - 2 \times \sqrt{7} \times y \times \frac{2\sqrt{7}}{7}$
 $y^2 - 4y + 3 = 0$, $(y-1)(y-3) = 0$
 $y = 1$ 또는 $y = 3$
 $\overline{BC} > \overline{CD}$ 이므로 $\overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 1$
삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
 $\cos \theta = \frac{2^2 + \overline{BD}^2 - 2^2}{2 \times 2 \times \overline{BD}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$
 $\overline{BD} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

삼각형 BCD에서 ∠BCD = 2θ이므로
사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{BD}}{\sin 2\theta} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$, $\sin 2\theta = \frac{4\sqrt{3}}{7}$
원 C₂의 반지름의 길이를 r,
삼각형 BCD의 넓이를 S라 하면
 $S = \frac{1}{2} \times r \times (\overline{BC} + \overline{CD} + \overline{BD})$
 $= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin 2\theta$ 에서

$$\frac{1}{2} \times r \times \left(3 + 1 + \frac{8\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$r = \sqrt{3} - \frac{2}{7}\sqrt{21}$$

22. [출제의도] 지수가 포함된 방정식 계산하기
 $(5^2)^x = (5^{-1})^{x-9}$, $5^{2x} = 5^{-x+9}$
 $2x = -x+9$, $x = 3$

23. [출제의도] ∑의 성질 이해하기

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{10} b_k = 2 \times \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{1}{2} \times (80 + 30) = 55$$

24. [출제의도] 로그 이해하기

$$\log_3 25 \times (\log_5 9 + \log_{25} 3)$$

$$= \log_3 25 \times \log_5 9 + \log_3 25 \times \log_{25} 3$$

$$= 2 \log_3 5 \times 2 \log_5 3 + 1 = 5$$

25. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 문제
해결하기

삼각형 ABC에서 ∠B = θ ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$)라 하면
삼각형 ABC의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \sin \theta = 12\sqrt{15}$
 $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos \theta = -\frac{1}{4}$
코사인법칙에 의하여
 $\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \times 8 \times 12 \times \left(-\frac{1}{4}\right)$
 $= 64 + 144 - 192 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 256$
선분 AC의 길이는 16

26. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제
해결하기

등비수열 {a_n}의 첫째항을 a₁ (a₁ > 0),
공비를 r이라 하면
 $a_2 = a_1 \times r = -54$... ㉠
이므로 r < 0
 $6S_1 + S_2 + S_4 = 0$ 이므로
 $6a_1 + \frac{a_1 \times (1-r^2)}{1-r} + \frac{a_1 \times (1-r^4)}{1-r} = 0$
 $6 + (1+r) + (1+r+r^2+r^3) = 0$
 $r^3 + r^2 + 2r + 8 = 0$
 $(r+2)(r^2-r+4) = 0$
 $r = -2$... ㉡
㉠, ㉡에 의하여
 $a_5 = a_2 \times r^3 = (-54) \times (-8) = 432$

27. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제
해결하기

함수 $y = a \sin \frac{\pi}{4}x + b$ 의 주기는 8,
치역은 {y | b - a ≤ y ≤ b + a}
경우 k에 대하여 A_k = {x | f(x) = k}라 할 때,

$i \neq j$ 이면 $A_i \cap A_j = \emptyset$
임의의 집합 X (X ≠ ∅)에 대하여
집합 X의 모든 원소의 합을 S(X)라 하자.
 $A_{b+a} = \{2\}$, $S(A_{b+a}) = 2$
 $A_b = \{0, 4, 8\}$, $S(A_b) = 12$
 $A_{b-a} = \{6\}$, $S(A_{b-a}) = 6$
집합 A = {x | f(x) = n, n은 자연수}라 할 때,
 $(A_b \cup A_{b+a}) \subset A$, $S(A_b \cup A_{b+a}) = 14$
(i) b = 1인 경우
① a = 1일 때
 $f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x + 1$ 이고
 $A_b \cup A_{b+a} = A$, $S(A) = 14$ 이므로
조건을 만족시키지 않는다.
② a ≥ 2일 때
 $b < m < b + a$ 인 정수 m에 대하여
 $S(A_m) = 4$,
 $(b+a) - b - 1 = 2$, a = 3
 $A_b \cup A_{b+1} \cup A_{b+2} \cup A_{b+3} = A$, $S(A) = 22$
(ii) b ≥ 2인 경우
① a = 1일 때
 $f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x + b$ 이고
 $A_{b-a} \cup A_b \cup A_{b+a} = A$, $S(A) = 20$ 이므로
조건을 만족시키지 않는다.
② a ≥ 2일 때
 $b - a < b - 1 < b$, $S(A_{b-1}) = 12$
 $(A_{b-1} \cup A_b \cup A_{b+a}) \subset A$,
 $S(A_{b-1} \cup A_b \cup A_{b+a}) = 26$
 $S(A) > 22$ 이므로
조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 a = 3, b = 1
 $a^2 + b^2 = 10$

28. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제
해결하기

조건 (가)에 의하여
 $b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 3a_{3n-1}$
조건 (나)에 의하여 수열 {b_n}은
첫째항이 3a₂, 공비가 3인 등비수열이므로
모든 자연수 n에 대하여
 $b_n = 3a_{3n-1} = 3a_2 \times 3^{n-1}$
 $a_{3n-1} = a_2 \times 3^{n-1}$
 $\sum_{k=1}^{14} a_k = a_{13} + a_{14} + \sum_{k=1}^4 (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k})$
 $= a_{13} + 81a_2 + \sum_{k=1}^4 b_k$
 $= a_{13} + 81a_2 + 3a_2 \times \sum_{k=1}^4 3^{k-1}$
 $= a_{13} + 81a_2 + 3a_2 \times \frac{3^4 - 1}{3 - 1}$
 $= a_{13} + 201a_2 = 500$
수열 {a_n}의 모든 항이 자연수이므로
 $a_2 = 1$ 또는 $a_2 = 2$
(i) a₂ = 1인 경우
 $a_{13} = 299$, $a_{14} = 81$, $a_{15} < 0$
조건을 만족시키지 않는다.

- (ii) $a_2 = 2$ 인 경우
 $a_{13} = 98, a_{14} = 162, a_{15} = 226$ 이므로
 조건을 만족시킨다.
 (i), (ii)에 의하여 $a_{13} = 98$

29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 추론하기

두 자연수 a, b 에 대하여

$$f(g(x)) = f\left(\sin\frac{\pi}{b}x + 3\right)$$

$$= \frac{3}{a} \left| \left(\sin\frac{\pi}{b}x + 3\right) - 3 \right| - b$$

$$= \frac{3}{a} \left| \sin\frac{\pi}{b}x \right| - b$$

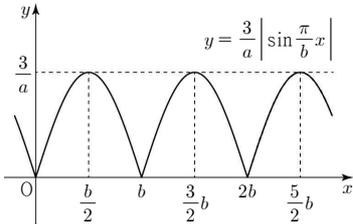
함수 $y = \frac{3}{a} \left| \sin\frac{\pi}{b}x \right|$ 의 그래프를

y 축의 방향으로 $-b$ 만큼 평행이동하면
 함수 $y = f(g(x))$ 의 그래프와 일치하므로

함수 $y = \frac{3}{a} \left| \sin\frac{\pi}{b}x \right|$ 의 그래프가

직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭일 때
 조건 (가)를 만족시킨다.

함수 $y = \frac{3}{a} \left| \sin\frac{\pi}{b}x \right|$ 의 주기는 b



함수 $y = \frac{3}{a} \left| \sin\frac{\pi}{b}x \right|$ 의 그래프는

직선 $x = \frac{k}{2}b$ (k 는 정수)에 대하여 대칭이므로

$\frac{k}{2}b = 3$ 이다.

조건 (가)를 만족시키는 자연수 b 는 1, 2, 3, 6

함수 $y = g(f(x))$ 의 그래프가 직선 $y = 3$ 과
 만나는 점의 x 좌표를 α 라 할 때,

$$g(f(\alpha)) = 3$$

$$f(\alpha) = t \text{ 라 하면 } g(t) = 3$$

$$\sin\frac{\pi}{b}t + 3 = 3, \sin\frac{\pi}{b}t = 0$$

$$t = 0, \pm b, \pm 2b, \dots$$

$0 \leq x \leq 6$ 일 때, 함수 $y = g(f(x))$ 의 그래프가

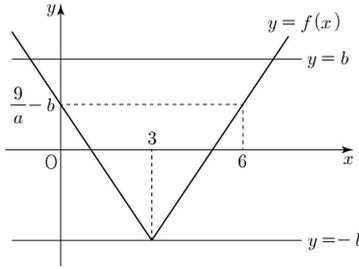
직선 $y = 3$ 과 만나는 서로 다른 점의 개수는

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가

직선 $y = 0, y = \pm b, y = \pm 2b, \dots$ 와 만나는

서로 다른 점의 개수의 합과 같으므로

$$0 \leq f(0) < b, 0 \leq \frac{9}{a} - b < b$$



$b \leq \frac{9}{a} < 2b$ 일 때, 조건 (나)를 만족시킨다.

(i) $b = 1$ 인 경우

$$1 \leq \frac{9}{a} < 2 \text{ 이므로 } a = 5, 6, 7, 8, 9$$

(ii) $b = 2$ 인 경우

$$2 \leq \frac{9}{a} < 4 \text{ 이므로 } a = 3, 4$$

(iii) $b = 3$ 인 경우

$$3 \leq \frac{9}{a} < 6 \text{ 이므로 } a = 2, 3$$

(iv) $b = 6$ 인 경우

$$6 \leq \frac{9}{a} < 12 \text{ 이므로 } a = 1$$

(i) ~ (iv)에 의하여 조건을 만족시키는
 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

- $(5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (9, 1),$
 $(3, 2), (4, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 6)$

$2a + b$ 의 최댓값 $M = 19$, 최솟값 $m = 7$
 $M \times m = 133$

30. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 추론하기

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이면

$$h(x) = g(x) + f(x) \text{ 이므로}$$

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 그래프가
 서로 다른 두 점에서 만난다.

방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 두 실근을
 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 하자.

$$x \leq x_1 \text{ 일 때, } f(x) \geq g(x)$$

$$x_1 < x < x_2 \text{ 일 때, } f(x) < g(x)$$

$$x \geq x_2 \text{ 일 때, } f(x) \geq g(x) \text{ 를 만족시킨다.}$$

$$h(x) = \begin{cases} g(x) + f(x) & (x \leq x_1 \text{ 또는 } x \geq x_2) \\ g(x) - f(x) & (x_1 < x < x_2) \end{cases}$$

함수 $h(x)$ 는 $x = x_1$ 과 $x = x_2$ 를 제외한 모든
 실수에서 극한값을 가지므로

조건 (가)에 의하여 $x_1 = 2$ 또는 $x_2 = 2$

(i) $x_1 = 2$ 인 경우

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_2^+} h(x) \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} h(x) = g(x_2) - f(x_2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^+} h(x) = g(x_2) + f(x_2) = 2g(x_2) \text{ 이므로}$$

$$g(x_2) = 0$$

직선 $y = g(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$$g(x_1) = g(2) < 0 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} h(x) = g(x_1) + f(x_1) = 2g(x_1) = 2g(2),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} h(x) = g(x_1) - f(x_1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} |h(x) - 1| = |2g(2) - 1| > 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} |h(x) - 1| = |0 - 1| = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1} |h(x) - 1| \text{의 값이 존재하지 않으므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $x_2 = 2$ 인 경우

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} h(x) \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} h(x) = g(x_1) + f(x_1) = 2g(x_1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} h(x) = g(x_1) - f(x_1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$g(x_1) = 0$$

직선 $y = g(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$$g(x_2) = g(2) > 0 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} h(x) = g(x_2) - f(x_2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^+} h(x) = g(x_2) + f(x_2) = 2g(x_2) = 2g(2)$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} |h(x) - 1| = |0 - 1| = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^+} |h(x) - 1| = |2g(2) - 1|$$

조건 (나)에 의하여 $g(2) = 1$

(i), (ii)에 의하여 $x_2 = 2$

$$g(2) = \frac{2}{3} + a = 1, a = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$g(x_1) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3} = 0, x_1 = -1$$

$$f(x_1) = f(-1) = g(-1) = 0,$$

$$f(x_2) = f(2) = g(2) = 1$$

상수 p 에 대하여

$$f(x) - g(x) = p(x+1)(x-2) \text{ 라 하면}$$

$$x_1 < 0 < x_2 \text{ 이므로}$$

$$h(0) = g(0) - f(0) = 2p = \frac{7}{3}$$

$$p = \frac{7}{6}$$

$$f(x) = \frac{7}{6}(x+1)(x-2) + g(x)$$

$x_2 < 5$ 이므로

$$h(5) = g(5) + f(5) = 2 + (21 + 2) = 25$$