

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ④ 02. ④ 03. ⑤ 04. ① 05. ②
 06. ⑤ 07. ① 08. ③ 09. ② 10. ③
 11. ⑤ 12. ① 13. ④ 14. ③ 15. ⑤
 16. 8 17. 17 18. 30 19. 10
 20. 12 21. 296 22. 73

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & 5^{\sqrt{2}+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}} \\ &= 5^{\sqrt{2}+1} \times 5^{-\sqrt{2}} \\ &= 5^{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}} \\ &= 5^1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

정답 ④

2. 출제의도 : 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & f'(x) = 2x - 4 \text{에서} \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = f'(4) \\ &= 2 \times 4 - 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 시그마의 정의를 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 (2a_k - 1) &= 2 \sum_{k=1}^6 a_k - \sum_{k=1}^6 1 \\ &= 2 \sum_{k=1}^6 a_k - 6 = 30 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } 2 \sum_{k=1}^6 a_k = 36$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^6 a_k = 18$$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 그래프를 이용하여 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (-1) + 2 = 1$$

정답 ①

5. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 2x(x^2 + x - 3) + (x^2 + 2)(2x + 1)$$

이므로

$$f'(1) = 2 \times (-1) + 3 \times 3$$

$$= 7$$

정답 ②

6. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos(\theta - \pi) = \frac{3}{5} \text{에서}$$

$$\cos(\theta - \pi) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

이므로

$$-\cos\theta = \frac{3}{5}, \text{ 즉 } \cos\theta = -\frac{3}{5}$$

$\cos\theta < 0$ 이고 조건에서 $\tan\theta < 0$ 이므로 θ 는 제2사분면의 각이다.

이때 $\sin\theta > 0$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 도함수를 활용하여 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6 \text{이므로}$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(3, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(3) = 3 \times 3^2 - 10 \times 3 + 6 = 3$$

그러므로 접선의 방정식은

$$y - 0 = 3(x - 3), \quad y = 3x - 9$$

이 접선이 점 $(5, a)$ 를 지나므로

$$a = 3 \times 5 - 9 = 6$$

정답 ①

8. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log \sqrt{2} a + \log_2 b = 2 \text{에서}$$

$$\log \sqrt{2} a + \log_2 b = 2 \log_2 a + \log_2 b$$

$$= \log_2 a^2 + \log_2 b$$

$$= \log_2 a^2 b$$

$$= 2$$

이므로

$$a^2 b = 2^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_2 a + \log_2 b^2 = 7 \text{에서}$$

$$\log_2 a + \log_2 b^2 = \log_2 ab^2 = 7$$

이므로

$$ab^2 = 2^7 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 변끼리 곱하면

$$a^3 b^3 = 2^2 \times 2^7 = 2^{2+7} = 2^9$$

이고 a, b 가 양의 실수이므로

$$(ab)^3 = (2^3)^3$$

에서

$$ab = 2^3 = 8$$

정답 ③

9. **출제의도** : 도함수의 성질과 부정적분의 정의를 이용하여 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$F(x)$ 가 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로

$$F'(x) = f(x)$$

이고, $G(x)$ 가 $2f(x)+1$ 의 한 부정적분이

므로

$$G'(x) = 2f(x) + 1$$

이때

$$H(x) = G(x) - 2F(x)$$

라 하면

$$\begin{aligned} H'(x) &= G'(x) - 2F'(x) \\ &= 2f(x) + 1 - 2f(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

이므로

$$H(x) = x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

한편, $G(3) = 2F(3)$ 에서

$$H(3) = G(3) - 2F(3) = 0$$

이므로

$$3 + C = 0$$

즉 $C = -3$ 이므로

$$H(x) = x - 3$$

따라서

$$\begin{aligned} G(5) - 2F(5) &= H(5) \\ &= 5 - 3 = 2 \end{aligned}$$

정답 ②

10. 출제의도 : 등비수열의 일반항 및 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 등비수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$r > 0$ 이다.

$$a_2 = 1 \text{에서 } a_1 r = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\sum_{k=1}^6 (-1)^k S_k = 21 \text{에서}$$

$$-S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6 = 21$$

$$(-S_1 + S_2) + (-S_3 + S_4) + (-S_5 + S_6) = 21$$

$$a_2 + a_4 + a_6 = 21$$

$$a_2 + a_2 r^2 + a_2 r^4 = 21$$

$$a_2 = 1 \text{이므로}$$

$$1 + r^2 + r^4 = 21$$

$$r^4 + r^2 - 20 = 0$$

$$(r^2 + 5)(r^2 - 4) = 0$$

$$(r^2 + 5)(r + 2)(r - 2) = 0$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = 2$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } 2a_1 = 1 \text{이므로}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

따라서

$$S_2 + S_7$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times (2^2 - 1)}{2 - 1} + \frac{\frac{1}{2} \times (2^7 - 1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{127}{2} = \frac{130}{2}$$

$$= 65$$

정답 ③

11. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\neg. v(t) = 3t^2 - 10t + 7$$

$$= (t - 1)(3t - 7)$$

이므로

$$v(t) = 0 \text{에서}$$

$$t=1 \text{ 또는 } t=\frac{7}{3}$$

$0 < t < 1$ 일 때, $v(t) > 0$ 이고

$1 < t < \frac{7}{3}$ 일 때, $v(t) < 0$ 이므로

시각 $t=1$ 일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 $t(t \geq 0)$ 일 때 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하자.

$t=0$ 일 때 점 P의 위치가 원점이므로

$$\begin{aligned} x(1) &= \int_0^1 v(t)dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 - 10t + 7)dt \\ &= \left[t^3 - 5t^2 + 7t \right]_0^1 \\ &= 1 - 5 + 7 \\ &= 3 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄷ. $0 < t < 1$ 일 때, $v(t) > 0$ 이고

$1 < t < 2$ 일 때, $v(t) < 0$ 이므로

시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 |v(t)|dt \\ &= \int_0^2 |3t^2 - 10t + 7|dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 - 10t + 7)dt \\ &\quad + \int_1^2 \{-(3t^2 - 10t + 7)\}dt \\ &= \left[t^3 - 5t^2 + 7t \right]_0^1 - \left[t^3 - 5t^2 + 7t \right]_1^2 \\ &= 3 - \{(8 - 20 + 14) - 3\} \\ &= 4 \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

12. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 주어진 삼각형의 넓이를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 좌표는 각각

$$A(t, a^t), B(2t, a^{2t})$$

이고 점 C의 좌표는 $C(2t, 0)$ 이다.

또한 삼각형 ACB는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변 삼각형이므로 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발 H는 선분 BC의 중점이다.

이때 $H(2t, a^t)$ 이므로

$$2a^t = a^{2t}$$

$$a^t = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 삼각형 ACB의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times (2t - t) \times a^{2t} = 8$$

$$t \times (a^t)^2 = 16$$

⑦에서 $a^t = 2$ 이므로

$$t \times 2^2 = 16$$

$$t = 4$$

즉 $a^4 = 2$ 이고 $a > 1$ 이므로

$$a = 2^{\frac{1}{4}}$$

따라서

$$a \times t = 2^{\frac{1}{4}} \times 4 = 2^{\frac{1}{4}+2} = 2^{\frac{9}{4}}$$

정답 ①

13. 출제의도 : 함수의 극한값이 존재하도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^2 + 6x + 12 = (x+3)^2 + 3 > 0$$

모든 실수 a 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)}$ 의 값이 존재

하는 경우를 다음 두 가지 경우로 나누어 조사하자.

(i) 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)\} \neq 0 \text{인 경우}$$

우

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)\}$$

$$= (f(a))^2 - k(a+2)f(a)$$

$$= f(a)\{f(a) - k(a+2)\}$$

$$f(a) > 0 \text{이므로}$$

$$f(a) \neq k(a+2)$$

x 에 대한 방정식 $f(x) = k(x+2)$ 의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이차방정식

$$x^2 + 6x + 12 = kx + 2k$$

즉, $x^2 + (6-k)x + 12 - 2k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (6-k)^2 - 4(12-2k) < 0$$

이어야 한다.

$$k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$(k+2)(k-6) < 0$$

$$-2 < k < 6$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} \{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)\} = 0$$

인 실수 a 가 존재하는 경우

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$a^2 = 0, a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)\}$$

$$= (f(0))^2 - 2kf(0)$$

$$= f(0)(f(0) - 2k) = 0$$

$$f(0) > 0 \text{이므로 } f(0) = 2k$$

$$\text{즉, } 12 = 2k \text{에서}$$

$$k = 6$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(f(x))^2 - 6(x+2)f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f(x)(f(x) - 6x - 12)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x^2 + 6x + 12)x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 6x + 12} = \frac{1}{12}$$

이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $-2 < k \leq 6$ 이므로

조건을 만족시키는 모든 정수 k 는

$-1, 0, 1, \dots, 6$ 이고 그 개수는 8이다.

정답 ④

14. 출제의도 : 삼각함수의 주기와 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

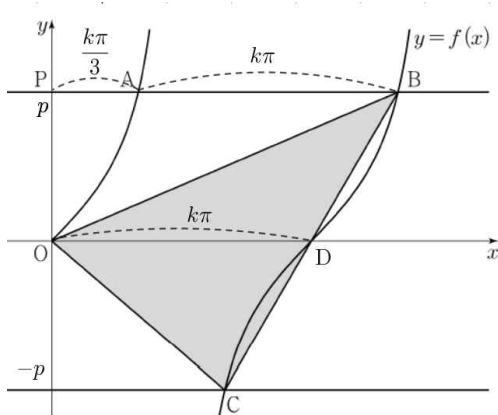
함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 D 라 하자.

함수 $y = \tan \frac{x}{k}$ 의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{1}{k}} = k\pi$ 이므로

$$\overline{AB} = \overline{OD} = k\pi$$

$$\overline{AB} = 3\overline{PA} \text{이므로}$$

$$\overline{PA} = \frac{1}{3} \times \overline{AB} = \frac{k\pi}{3}$$



점 A의 좌표가 $\left(\frac{k\pi}{3}, p\right)$ 이고 점 A가
함수 $f(x) = \tan \frac{x}{k}$ 의 그래프 위의
점이므로
 $p = \tan\left(\frac{1}{k} \times \frac{k\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$ 이고
(삼각형 OCB의 넓이)
=(삼각형 ODB의 넓이)
+(삼각형 OCD의 넓이)
 $= \frac{1}{2} \times \overline{OD} \times p + \frac{1}{2} \times \overline{OD} \times p$
 $= 2 \times \frac{1}{2} \times k\pi \times \sqrt{3}$
 $= \sqrt{3} k\pi$
이므로
 $\sqrt{3} k\pi = \frac{5\pi}{3}$
 $k = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$
따라서
 $k+p = \frac{5\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3}$
 $= \frac{14\sqrt{3}}{9}$

정답 ③

15. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$ 를 정한 후 $f(8)$ 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g(x) = \int_0^x (|f(t)| - |t|) dt \text{에서}$$

$$g'(x) = |f(x)| - |x|$$

이때 조건 (나)에서 $g'(2) = 0$, $g'(6) = 0$

이므로

$$|f(2)| = 2, |f(6)| = 6$$

즉,

$$f(2) = -2 \text{ 또는 } f(2) = 2 \text{ 이고}$$

$$f(6) = -6 \text{ 또는 } f(6) = 6$$

또한 주어진 조건에서 $f(0) = 0$ 이다.

그리고 조건 (가)에 의하여 방정식

$$f(x) = x \text{ 또는 } f(x) = -x$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4이다.

(i) $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f(6) = 6$ 일 때

방정식 $f(x) = x$ 가 $x = 0$, $x = 2$,

$x = 6$ 의 세 실근을 가지므로

$$f(x) - x = kx(x-2)(x-6)$$

$$f(x) = kx(x-2)(x-6) + x$$

(k 는 양의 상수)

라 하자.

이때 방정식 $f(x) = -x$ 가 0이 아닌

한 실근을 가져야 조건 (가)를 만족

시키므로

$$kx(x-2)(x-6) + x = -x$$

$$x\{k(x-2)(x-6) + 2\} = 0$$

$$x(kx^2 - 8kx + 12k + 2) = 0$$

에서 x 에 대한 이차방정식

$$kx^2 - 8kx + 12k + 2 = 0 \text{이 중근을 가}$$

져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D

라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (-4k)^2 - k(12k+2) \\ &= 4k^2 - 2k \\ &= 2k(2k-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

에서 $k > 0$ 이므로 $k = \frac{1}{2}$

$kx^2 - 8kx + 12k + 2 = 0$ 에서

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0, \quad x^2 - 8x + 16 = 0$$

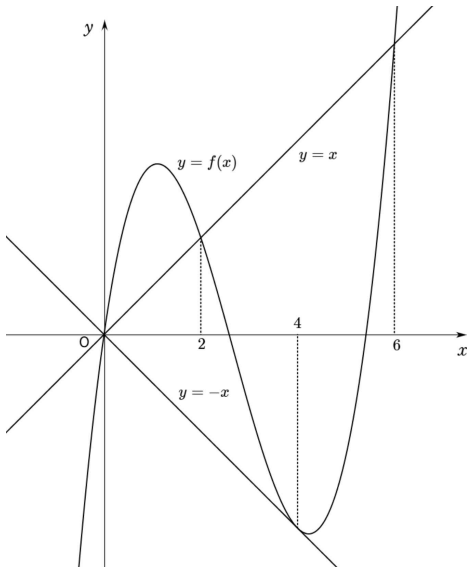
$$(x-4)^2 = 0, \quad x = 4$$

따라서 함수

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(x-6) + x$$

의 그래프는 그림과 같고

$$g(2) = \int_0^2 (|f(t)| - |t|) dt > 0$$



이때 $f(6) \times g(2) < 0$ 에서 $g(2) < 0$ 이므로 모순이다.

- (ii) $f(0)=0, f(2)=2, f(6)=-6$ 일 때
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $f(6)=-6$ 이므로
 $x > 6$ 일 때 직선 $y=x$ 와 반드시 교점을 갖는다.

따라서 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y=-x$ 가 $x=6$ 에서 접해야 한다.

그러나 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 가 $x=6$ 에서 극값을 가지므로 모순이다.

- (iii) $f(0)=0, f(2)=-2, f(6)=-6$ 일

때

방정식 $f(x)=-x$ 에서 $x=0,$

$x=2, x=6$ 의 세 실근을 가지므로

$$f(x) + x = kx(x-2)(x-6)$$

$$f(x) = kx(x-2)(x-6) - x$$

(k 는 양의 상수)

라 하자.

이때 $f(x)=x$ 가 0이 아닌 한 실근을 가져야 조건 (가)를 만족시키므로

$$kx(x-2)(x-6) - x = x$$

$$x\{k(x-2)(x-6) - 2\} = 0$$

$$x(kx^2 - 8kx + 12k - 2) = 0$$

에서 x 에 대한 이차방정식

$kx^2 - 8kx + 12k - 2 = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-4k)^2 - k(12k-2)$$

$$= 4k^2 + 2k$$

$$= 2k(2k+1)$$

$$= 0$$

에서

$$k=0 \text{ 또는 } k=-\frac{1}{2}$$

그런데 $k > 0$ 이므로 모순이다.

- (iv) $f(0)=0, f(2)=-2, f(6)=6$ 일 때

$f(x) = kx^3 + px^2 + qx$ (k 는 양의 상수, p, q 는 상수)라 하자.

이때

$$f(2) = 8k + 4p + 2q = -2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(6) = 216k + 36p + 6q = 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이므로 $2 < x < 6$ 에서 $f(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값이 반드시 존재한다.

이때, $f(6) \times g(2) < 0$ 에서

$g(2) < 0$ 이어야 하고, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 가지므로 $2 < x < 6$ 에서 방정식

$|f(x)| = x$ 를 만족시키는 x 의 값이 반드시 존재한다.

즉, $x < 0$ 에서 방정식 $f(x) = -x$ 는 근을 갖지 않아야 조건 (가)를 만족시키므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 와 $x=0$ 에서 접해야 한다.

이때 $f'(x) = 3kx^2 + 2px + q$ 이므로

$$f'(0) = q = 1$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$k = \frac{1}{4}, \quad p = -\frac{3}{2}$$

이므로

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$$

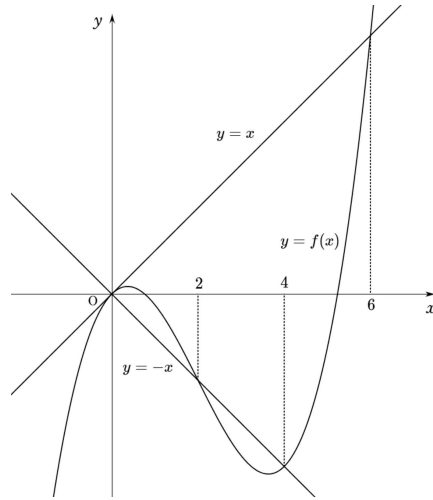
이상에서 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$ 이므로

$$f(8) = \frac{1}{4} \times 8^3 - \frac{3}{2} \times 8^2 + 8 = 40$$

정답 ⑤

[참고]

주어진 조건을 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



16. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열에서 a_3 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a_1 = 1 \text{ 이고 } a_{n+1} = na_n + 2 \text{ 이므로}$$

$$a_2 = 1 \times a_1 + 2 = 3$$

따라서

$$a_3 = 2 \times a_2 + 2 = 8$$

정답 8

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$= x^3 + x^2 + x + C$$

(단, C 는 적분상수)

$$f(1) = 1 + 1 + 1 + C = 6 \text{에서}$$

$$C = 3$$

따라서

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 3$$

이므로

$$f(2) = 8 + 4 + 2 + 3 = 17$$

정답 17

18. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 6 \text{에서}$$

$$a_1 + 2d = 6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$2a_5 - a_4 = 15 \text{에서}$$

$$2(a_1 + 4d) - (a_1 + 3d) = 15$$

$$a_1 + 5d = 15 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$3d = 9$$

$$d = 3$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } a_1 + 6 = 6 \text{이므로}$$

$$a_1 = 0$$

따라서

$$a_{11} = a_1 + 10d = 0 + 10 \times 3 = 30$$

정답 30

19. 출제의도 : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 5a \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x - a)$$

이때 함수 $f(x)$ 는 극솟값을 가지므로 $a \neq 0$ 이다.

(i) $a < 0$ 일 때

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f(0) = 5a = a$$

$$a = 0$$

$a < 0$ 이므로 모순이다.

(ii) $a > 0$ 일 때

함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f(a) = 2a^3 - 3a^3 + 5a = -a^3 + 5a = a$$

$$a^3 - 4a = 0, \quad a(a+2)(a-2) = 0$$

이때 $a > 0$ 이므로

$$a = 2$$

(i), (ii)에서 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 10$ 이고

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은

$$f(0) = 10$$

정답 10

20. 출제의도 : 원의 성질과 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BPC = \theta$ 라 할 때,

$$\overline{PB} : \overline{PC} : \overline{BC} = 7 : 5 : \sqrt{14} \text{이므로}$$

삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{6}{7} \text{이다.}$$

$$\overline{PB} : \overline{PC} = 7 : 5 \text{에서 } \overline{PB} = 7k, \quad \overline{PC} = 5k,$$

$$\overline{AB} : \overline{CD} = 1 : 3 \text{에서 } \overline{AB} = l, \quad \overline{CD} = 3l \text{이라 하자.}$$

원의 성질에 의하여

삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음

이므로

$$\overline{PB} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PA} \text{이고,}$$

$$\overline{PD} = \overline{PC} + \overline{CD} = 5k + 3l,$$

$$\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{AB} = 7k + l$$

이므로 $\overline{PB} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PA}$ 에서

$$7 : 5 = (5k + 3l) : (7k + l)$$

$$5(5k + 3l) = 7(7k + l)$$

$$l = \boxed{3} \times k \text{이다.}$$

$$\overline{PD} = 5k + 3l = 14k \text{이므로}$$

$$\overline{PB} : \overline{PD} = 7k : 14k = 1 : 2$$

즉, 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음

비가 $1 : \boxed{2}$ 이므로

$$\overline{BC} = \frac{1}{\boxed{2}} \times \overline{AD} \text{이다.}$$

$$\cos \theta = \frac{6}{7} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{6}{7}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{7} \end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \frac{1}{2} \overline{AD} \\ &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{13} \\ &= 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 할 때, 삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} R &= \frac{\overline{BC}}{2 \sin \theta} \\ &= \frac{2\sqrt{13}}{2 \times \frac{\sqrt{13}}{7}} \\ &= \boxed{7} \end{aligned}$$

따라서 $p = 3$, $q = 2$, $r = 7$ 이므로

$$\begin{aligned} p + q + r &= 3 + 2 + 7 \\ &= 12 \end{aligned}$$

정답 12

21. 출제의도 : 함수의 극대, 극소를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수
이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c \\ &\quad (\text{단, } a, b, c \text{는 상수}) \end{aligned}$$

로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

주어진 조건에서 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{f'(x)}{2} + x^2 - 2 \leq \frac{f(2x) - f(0)}{2x} \leq x^4$$

이므로

$$\frac{3x^2 + 2ax + b}{2} + x^2 - 2 \leq \frac{8x^3 + 4ax^2 + 2bx}{2x} \leq x^4$$

$$5x^2 + 2ax + b - 4 \leq 8x^2 + 4ax + 2b \leq 2x^4$$

즉,

$$-3x^2 - 4 \leq 2ax + b \leq x^4 - 4x^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때

$$g(x) = -3x^2 - 4, \quad h(x) = x^4 - 4x^2$$

이라 하면 곡선 $y = g(x)$ 는 꼭짓점의 좌표가 $(0, -4)$ 인 위로 볼록한 포물선이다.

또,

$$h'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 0$$

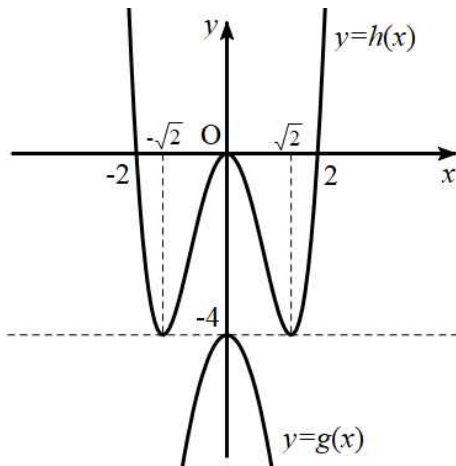
에서

$$x = 0, \quad x = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2}$$

이므로 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

즉, 두 함수 $y = g(x)$, $y = h(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 부등식 ㉠을 만족시키려면 직선 $y = 2ax + b$ 가 $y = -4$ 이어야 한다.

즉, $a = 0$, $b = -4$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

따라서

$$f'(10) = 3 \times 10^2 - 4 = 296$$

정답 296

22. 출제의도 : 로그함수의 그래프와 로그의 성질을 이용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B가 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 점이므로 두 점 A, B를

$$A(a, \log_2 a), \quad B(b, \log_2 b)$$

(단, a, b 는 양수)

로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서

(직선 AP의 y 절편)

— (직선 BQ의 y 절편)

$$= \frac{13}{2}$$

이므로 $a > b$ 이다.

점 A에서 직선 $y = x$ 에 내린 수선의 발이 점 P이므로 직선 AP의 기울기는 -1 이다.

이때, 직선 AP의 방정식은

$$y - \log_2 a = -(x - a)$$

$$\text{즉, } y = -x + a + \log_2 a$$

이므로 직선 AP의 y 절편은 $a + \log_2 a$ 이다.

점 B를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는 $(\log_2 b, b)$

이고, 직선 BQ의 기울기는 -1 이다.

이때, 직선 BQ의 방정식은

$$y - \log_2 b = -(x - b)$$

$$\text{즉, } y = -x + b + \log_2 b$$

이므로 직선 BQ의 y 절편은 $b + \log_2 b$ 이다.

조건 (가)에 의하여

$$(a + \log_2 a) - (b + \log_2 b) = \frac{13}{2}$$

이므로

$$(a-b) + (\log_2 a - \log_2 b) = \frac{13}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 조건 (나)에서 직선 AB의 기울기가 $\frac{6}{7}$ 이므로

$$\frac{\log_2 a - \log_2 b}{a-b} = \frac{6}{7}$$

$$\log_2 a - \log_2 b = \frac{6}{7}(a-b) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$(a-b) + \frac{6}{7}(a-b) = \frac{13}{2}$$

$$\frac{13}{7}(a-b) = \frac{13}{2}$$

$$a-b = \frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

⑨를 ⑧에 대입하면

$$\log_2 a - \log_2 b = \frac{6}{7} \times \frac{7}{2}$$

$$\log_2 \frac{a}{b} = 3$$

$$\frac{a}{b} = 2^3$$

$$a = 8b \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

⑩을 ⑨에 대입하면

$$8b - b = \frac{7}{2}$$

$$7b = \frac{7}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ 을 } \textcircled{10} \text{ 에 대입하면}$$

$$a = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

직선 AP의 방정식은

$$y = -x + 6$$

이고, 직선 AP와 직선 $y = x$ 의 교점이 점 P이므로

$$-x + 6 = x \text{에서}$$

$$x = 3$$

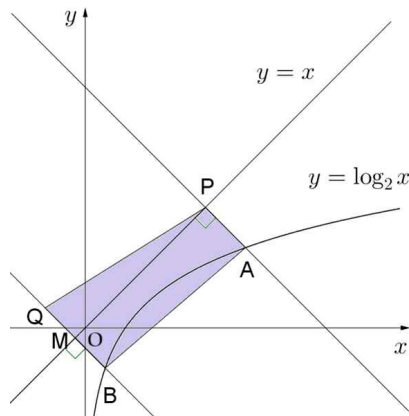
즉 점 P의 좌표는 (3, 3)

한편, 세 점 A, B, Q는

$$A(4, 2), B\left(\frac{1}{2}, -1\right), Q\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

선분 BQ의 중점을 M이라 하면

$$M\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \text{이고 } \angle PMB = 90^\circ \text{이다.}$$



이때

$$\overline{AP} = \sqrt{(3-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2},$$

$$\overline{BQ} = \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left\{\frac{1}{2} - (-1)\right\}^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\overline{PM} = \sqrt{\left(-\frac{1}{4} - 3\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} - 3\right)^2} = \frac{13\sqrt{2}}{4}$$

이므로 사각형 APQB의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times (\overline{AP} + \overline{BQ}) \times \overline{PM}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \times \frac{13\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{65}{8}$$

따라서 $p = 8$, $q = 65$ 이므로

$$p + q = 8 + 65$$

$$= 73$$

정답 73

■ [선택: 기하]

23. ② 24. ④ 25. ① 26. ① 27. ②
28. ④ 29. 396 30. 69

23. 출제의도 : 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2 = 8x$, 즉 $y^2 = 4 \times 2 \times x$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

따라서 $p = 2$

정답 ②

24. 출제의도 : 방향벡터를 이용하여 두 직선이 평행하도록 하는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 직선

$$\frac{x-1}{2} = y-4, \quad \frac{x+2}{8} = \frac{y+5}{a}$$

의 방향벡터를 각각

$$\vec{u} = (2, 1), \quad \vec{v} = (8, a)$$

라 하자.

두 직선이 서로 평행하려면 두 벡터 $\vec{u}$,

$\vec{v}$ 가 서로 평행해야 하므로

$$\vec{ku} = \vec{v}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

즉, $2k = 8$, $k = a$ 이어야 하므로

$$k = 4$$

따라서 $a = 4$

정답 ④

25. 출제의도 : 좌표공간에서 점을 대칭 이동한 점의 좌표와 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $A(4, 3, -9)$ 를 xy 평면에 대하여 대칭 이동한 점 B 의 좌표는

$$B(4, 3, 9)$$

또, 점 $A(4, 3, -9)$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 점 C 의 좌표는

$$C(-4, -3, 9)$$

따라서 선분 BC 의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \sqrt{(-4-4)^2 + (-3-3)^2 + (9-9)^2} \\ &= \sqrt{64+36} \\ &= 10 \end{aligned}$$

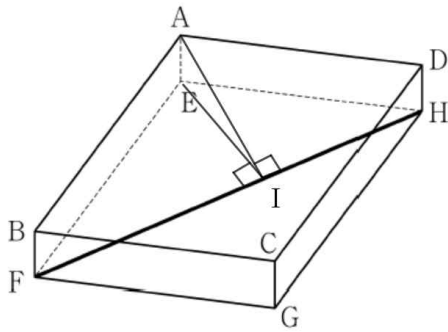
정답 ①

26. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A 에서 평면 $EFGH$ 에 내린 수선의 발이 점 E 이고, 점 E 에서 선분 FH 에 내린 수선의 발을 I 라 하면 삼수선의 정리에 의하여 두 선분 AI 와 FH 는 서로 수직이다.

그러므로 점 A 와 직선 FH 사이의 거리는 선분 AI 의 길이와 같다.



직각삼각형 EFH에서 $\overline{EF}=10$, $\overline{EH}=5$
이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{FH}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{EH}^2$$

$$= 10^2 + 5^2$$

$$= 125$$

$$\overline{FH} = 5\sqrt{5}$$

직각삼각형 EFH의 넓이를 구하는
식에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{EH} = \frac{1}{2} \times \overline{FH} \times \overline{EI}$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 5 = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{5} \times \overline{EI}$$

$$\overline{EI} = 2\sqrt{5}$$

직각삼각형 AEI에서 피타고라스 정리에
의하여

$$\overline{AI}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EI}^2$$

$$= 1^2 + (2\sqrt{5})^2$$

$$= 21$$

$$\overline{AI} = \sqrt{21}$$

따라서 점 A와 직선 FH 사이의 거리는

$$\overline{AI} = \sqrt{21}$$

정답 ①

27. 출제의도 : 쌍곡선의 정의를 이용하여 곡선 위의 점의 좌표를 구하고, 그 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선의 방정식이 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ 이므로

$$c^2 = 9 + 16 = 25$$

즉, 두 초점의 좌표는

$$F(0, 5), F'(0, -5)$$

점 P가 제2사분면에 있으므로

$$\overline{PF} < \overline{PF'}$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 8 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

삼각형 PF'F의 둘레의 길이가 30이고

$$\overline{FF'} = 10 \text{이므로}$$

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 20 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②에서

$$\overline{PF} = 6, \overline{PF'} = 14$$

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\overline{PF}^2 = a^2 + (b-5)^2 = 36 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\overline{PF'}^2 = a^2 + (b+5)^2 = 196 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

③, ④에서 $a < 0, b > 0$ 이므로

$$a = -3\sqrt{3}, b = 8$$

즉, $P(-3\sqrt{3}, 8)$ 이므로 주어진 쌍곡선

위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{-3\sqrt{3}x}{9} - \frac{8y}{16} = -1$$

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

정답 ②

28. 출제의도 : 구의 방정식과 정사영의 성질의 이용하여 두 평면이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 36$ 은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 6인 구이다. 두 점 A, B가 모두 구 S 위의 점이므로 $\overline{OA} = \overline{OB} = 6$

두 점 A, B에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하자.

조건 (가)에서 점 C가 선분 OA 위의 점이므로 점 C에서 직선 AA'에 내린 수선의 발은 선분 AA' 위에 있다.

이 수선의 발을 H라 하자.

이때 직선 BC와 xy 평면이 서로 평행하므로 두 점 B, C의 z 좌표가 서로 같고, 점 B에서 선분 AA'에 내린 수선의 발도 점 H이다.

두 직선 OA, AB와 xy 평면이 이루는 예각의 크기가 각각 α , β 이고 두 평면 BHC, xy 평면이 서로 평행하므로

$$\angle ACH = \alpha, \angle ABH = \beta$$

두 직각삼각형 ACH, ABH에서

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}, \sin \beta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$$

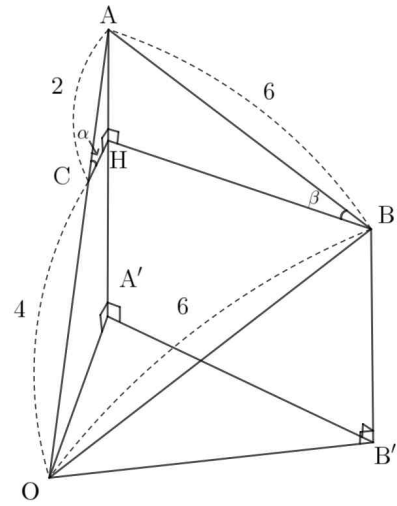
이고 조건 (나)에서 $\sin \alpha = 3 \sin \beta$ 이므로

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = 3 \times \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}, \text{ 즉 } \overline{AB} = 3\overline{AC}$$

$$\overline{AC} = \overline{OA} - \overline{OC} = 6 - 4 = 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} = 3\overline{AC} = 3 \times 2 = 6$$

그러므로 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다.



$\overline{AH} = h$ 라 하면 두 직선 CH, OA'이 서로 평행하므로

$$\overline{AH} : \overline{HA'} = \overline{AC} : \overline{CO}$$

$$h : \overline{HA'} = 2 : 4$$

$$\overline{HA'} = 2h$$

직각삼각형 AOA'에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OA'}^2 + \overline{AA'}^2 = \overline{OA}^2$$

$$\overline{OA'}^2 + (3h)^2 = 6^2$$

$$\overline{OA'} = \sqrt{36 - 9h^2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

직각삼각형 OB'B에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OB'}^2 + \overline{B'B}^2 = \overline{OB}^2$$

$$\overline{OB'}^2 + \overline{A'H}^2 = \overline{OB}^2$$

$$\overline{OB'}^2 + (2h)^2 = 6^2$$

$$\overline{OB'} = \sqrt{36 - 4h^2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

직각삼각형 AHB에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{AB}^2$$

$$h^2 + \overline{HB}^2 = 6^2$$

$$\overline{HB} = \sqrt{36 - h^2}$$

$$\overline{A'B'} = \overline{HB} \text{ 이므로}$$

$$\overline{A'B'} = \sqrt{36 - h^2} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

조건에서 삼각형 OAB의 xy 평면 위로의 정사영인 삼각형 OA'B'이 직각삼각형이다.

이때 ㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{A'B'} > \overline{OB'} > \overline{OA'}$ 이므로 직각삼각형 OA'B'의 빗변의 길이는 $\overline{A'B'}$ 이고 밑변과 높이의 길이는 $\overline{OB'}$, $\overline{OA'}$ 이다.

직각삼각형 OA'B'에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{OA'}^2$$

$$36 - h^2 = (36 - 4h^2) + (36 - 9h^2)$$

$$h^2 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$

삼각형 OAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로 삼각형 OAB의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$$

삼각형 OA'B'은 밑변과 높이의 길이가

$$\overline{OA'} = \sqrt{36 - 9h^2} = 3,$$

$$\overline{OB'} = \sqrt{36 - 4h^2} = 2\sqrt{6}$$

인 직각삼각형이므로 삼각형 OA'B'의 넓이를 S' 라 하면

$$S' = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

따라서 평면 OAB와 xy 평면이 이루는 예각의 크기 θ 에 대하여

$$S \cos \theta = S' \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{S'}{S} = \frac{3\sqrt{6}}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 타원의 정의를 이용하여 타원의 장축의 길이를 구할 수 있는가?

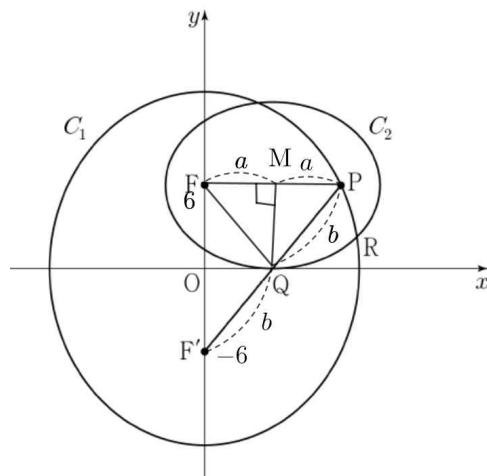
정답풀이 :

두 초점이 P, F인 타원 C_2 의 꼭짓점 중 하나가 점 Q이므로 $\overline{QP} = \overline{QF}$ 이고 점 Q에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{MP} = \overline{MF}$ 이다.

두 직선 FF', MQ가 서로 평행하므로 두 삼각형 PMQ, PFF'은 닮음비가 $\overline{PM} : \overline{PF} = 1 : 2$ 인 닮은 삼각형이다.

$$\text{이때 } \overline{MQ} = \frac{1}{2} \overline{FF'} = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \text{ 이다.}$$

$\overline{MP} = a$, $\overline{PQ} = b$ 라 하자.



직각삼각형 PMQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2$$

$$b^2 = a^2 + 6^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 R, P가 두 초점이 F, F'인 타원 C_1 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FR} + \overline{F'R} = \overline{FP} + \overline{F'P}$$

$$\overline{FR} + \overline{F'R} = 2a + 2b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 점 R, Q가 두 초점이 F, P인 타원 C_2 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FR} + \overline{PR} = \overline{FQ} + \overline{PQ}$$

$$\overline{FR} + \overline{PR} = 2b \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①-③에서

$$\overline{F'R} - \overline{PR} = 2a$$

조건에서 $\overrightarrow{FR} - \overrightarrow{PR} = 7\sqrt{2}$ 이므로

$$2a = 7\sqrt{2}$$

$$a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

㉗에서

$$b^2 = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 6^2 = \frac{49}{2} + 36 = \frac{121}{2}$$

$$b = \frac{11}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{2}$$

㉘에서 타원 C_1 의 장축의 길이는

$$2a + 2b = 7\sqrt{2} + 11\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

㉙에서 타원 C_2 의 장축의 길이는

$$2b = 11\sqrt{2}$$

따라서 두 타원 C_1, C_2 의 장축의 길이의 곱은

$$18\sqrt{2} \times 11\sqrt{2} = 396$$

정답 396

30. 출제의도 : 벡터의 내적과 벡터 사이의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PQ}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

이므로 선분 BQ의 중점을 D라 하면

$$2\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

즉, $\overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{BC}$ 이므로 삼각형 PBQ는

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PQ}$ 인 이등변삼각형이고

$$\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$$

$$\text{또, } (\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RQ}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

이므로 선분 QC의 중점을 E라 하면

$$2\overrightarrow{RE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

즉, $\overrightarrow{RE} \perp \overrightarrow{BC}$ 이므로 삼각형 RQC는

$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RC}$ 인 이등변삼각형이고

$$\overrightarrow{RQ} \parallel \overrightarrow{AB}$$

조건 (나)에서

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = |\overrightarrow{QP}|^2$$

이므로 $\angle PQR = \theta$ 라 하면

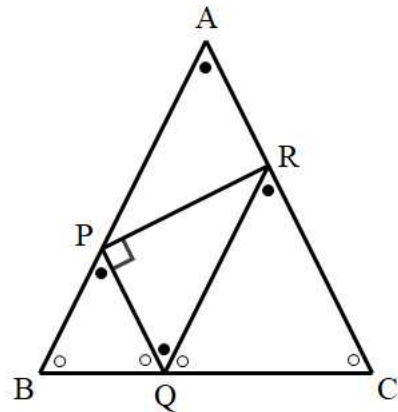
$$|\overrightarrow{QR}| \cos \theta = |\overrightarrow{QP}|$$

에서

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{QP}|}{|\overrightarrow{QR}|}$$

이를 만족시키려면 $\angle RPQ = \frac{\pi}{2}$ 이어야

하므로 주어진 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(8\sqrt{5})^2 + (8\sqrt{5})^2 - 16^2}{2 \times 8\sqrt{5} \times 8\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

이고, $\angle PQR = \angle A$ 이므로

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RQ}} = \frac{3}{5}$$

이때 두 삼각형 PBQ, RQC는 서로 닮음

이므로

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RC}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}} = \frac{3}{5}$$

이고, $\overline{BQ} + \overline{QC} = 16$ 이므로

$$\overline{BQ} = 6, \overline{QC} = 10$$

그러므로

$$\overline{PQ} = 3\sqrt{5}, \overline{RQ} = 5\sqrt{5}, \overline{PR} = 4\sqrt{5}$$

한편, 선분 PR을 1:3으로 내분하는 점을 S라 하면

$$\overrightarrow{XS} = \frac{\overrightarrow{XR} + 3\overrightarrow{XP}}{1+3}$$

이므로

$$3\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XR} = 4\overrightarrow{XS}$$

이다. 즉,

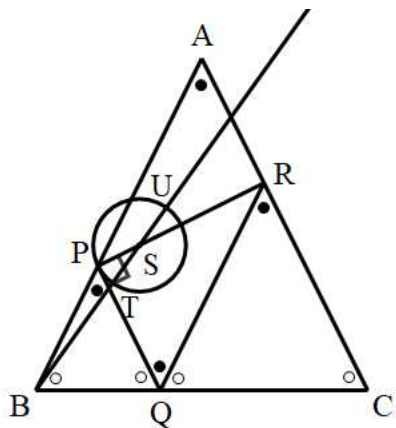
$$|3\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XR}| = |\overrightarrow{PR}|$$

을 만족시키는 점 X는

$$|\overrightarrow{XS}| = \frac{1}{4} |\overrightarrow{PR}|$$

을 만족시킨다.

그러므로 점 X는 다음 그림과 같이 선분 PR을 1:3으로 내분하는 점 S를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원 위를 움직인다.



위 그림과 같이 직선 BS가 원과 만나는

점 중 B와 가까운 점을 T, 먼 점을 U

라 하면

$$|\overrightarrow{BT}| \leq |\overrightarrow{BX}| \leq |\overrightarrow{BU}|$$

이므로

$$M = |\overrightarrow{BU}|, m = |\overrightarrow{BT}|$$

이다.

한편, 삼각형 PBS에서

$$\overline{PB} = \overline{PQ} = 3\sqrt{5},$$

$$\overline{PS} = \frac{1}{4} \overline{PR} = \frac{1}{4} \times 4\sqrt{5} = \sqrt{5},$$

$$\angle SPB = \frac{\pi}{2} + \angle BPQ = \frac{\pi}{2} + \angle A$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BS}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{PS}^2 - 2 \times \overline{PB} \times \overline{PS} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \angle A\right) \\ &= 45 + 5 + 30 \times \sin(\angle A) \\ &= 50 + 30 \times \frac{4}{5} \\ &= 74 \end{aligned}$$

따라서

$$M = \sqrt{74} + \sqrt{5}, m = \sqrt{74} - \sqrt{5}$$

이므로

$$\begin{aligned} M \times m &= (\sqrt{74} + \sqrt{5})(\sqrt{74} - \sqrt{5}) \\ &= 74 - 5 = 69 \end{aligned}$$

정답 69