2026학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가
수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2025. 9. 08.(월)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ④	02. ④	03. ⑤	04. ①	05. ②
06. ⑤	07. ①	08. ③	09. ②	10. ③
11. ⑤	12. ①	13. ④	14. ③	15. ⑤
16. 8	17. 17	18. 30	19. 10	
20. 12	21. 296	22. 73		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$5^{\sqrt{2}+1}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$

$=5^{\sqrt{2}+1}\times 5^{-\sqrt{2}}$

$=5^{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}$

$=5^1$

$=5$

정답 ④

2. **출제의도** : 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x-4$에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)$$

$$=2\times 4-4$$

$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 시그마의 정의를 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{6}(2a_k-1)=2\sum_{k=1}^{6}a_k-\sum_{k=1}^{6}1$$

$$=2\sum_{k=1}^{6}a_k-6=30$$

에서 $2\sum_{k=1}^{6}a_k=36$

따라서 $\sum_{k=1}^{6}a_k=18$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 그래프를 이용하여 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=2$

이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=(-1)+2=1$

정답 ①

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x(x^2+x-3)+(x^2+2)(2x+1)$

이므로

$f'(1)=2\times(-1)+3\times 3$

$=7$

정답 ②

6. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\theta-\pi)=\frac{3}{5}$에서

$\cos(\theta-\pi)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

이므로

$-\cos\theta=\frac{3}{5}$, 즉 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\cos\theta<0$이고 조건에서 $\tan\theta<0$이므로

θ는 제2사분면의 각이다.

이때 $\sin\theta>0$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{16}{25}}\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 도함수를 활용하여 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-5x^2+6x$라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+6$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=3\times3^2-10\times3+6=3$

그러므로 접선의 방정식은

$y-0=3(x-3)$, $y=3x-9$

이 접선이 점 $(5,a)$를 지나므로

$a=3\times5-9=6$

정답 ①

8. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_{\sqrt{2}}a+\log_2 b=2$에서

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}}a+\log_2 b&=2\log_2 a+\log_2 b\\&=\log_2 a^2+\log_2 b\\&=\log_2 a^2b\\&=2\end{aligned}$$

이므로

$a^2b=2^2$ …… ㉠

$\log_2 a+\log_2 b^2=7$에서

$\log_2 a+\log_2 b^2=\log_2 ab^2=7$

이므로

$ab^2=2^7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면

$a^3b^3=2^2\times2^7=2^{2+7}=2^9$

이고 a, b가 양의 실수이므로

$(ab)^3=(2^3)^3$

에서

$ab=2^3=8$

정답 ③

9. 출제의도 : 도함수의 성질과 부정적분의 정의를 이용하여 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

이고, $G(x)$가 $2f(x)+1$의 한 부정적분이므로

$G'(x)=2f(x)+1$

이때

$H(x)=G(x)-2F(x)$

라 하면

$$\begin{aligned}H'(x)&=G'(x)-2F'(x)\\&=2f(x)+1-2f(x)\\&=1\end{aligned}$$

이므로

$H(x)=x+C$ (단, C는 적분상수)

한편, $G(3)=2F(3)$에서

$H(3)=G(3)-2F(3)=0$

이므로

$3+C=0$

즉 $C=-3$이므로

$H(x)=x-3$

따라서

$$\begin{aligned}G(5)-2F(5)&=H(5)\\&=5-3=2\end{aligned}$$

정답 ②

10. **출제의도** : 등비수열의 일반항 및 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 등비수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$r>0$이다.

$a_2=1$에서 $a_1r=1$ ⋯⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{6}(-1)^k S_k=21$에서

$-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5+S_6=21$

$(-S_1+S_2)+(-S_3+S_4)+(-S_5+S_6)=21$

$a_2+a_4+a_6=21$

$a_2+a_2r^2+a_2r^4=21$

$a_2=1$이므로

$1+r^2+r^4=21$

$r^4+r^2-20=0$

$(r^2+5)(r^2-4)=0$

$(r^2+5)(r+2)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

㉠에서 $2a_1=1$이므로

$a_1=\frac{1}{2}$

따라서

S_2+S_7

$$=\frac{\frac{1}{2}\times(2^2-1)}{2-1}+\frac{\frac{1}{2}\times(2^7-1)}{2-1}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{127}{2}=\frac{130}{2}$$

$=65$

정답 ③

11. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $$\begin{aligned}v(t)&=3t^2-10t+7\\&=(t-1)(3t-7)\end{aligned}$$

이므로

$v(t)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=\frac{7}{3}$

$0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<\frac{7}{3}$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 $t(t \geq 0)$일 때 점 P의 위치를 $x(t)$라 하자.

$t=0$일 때 점 P의 위치가 원점이므로

$$x(1)=\int_0^1 v(t)dt$$
$$=\int_0^1 (3t^2-10t+7)dt$$
$$=\left[t^3-5t^2+7t\right]_0^1$$
$$=1-5+7$$
$$=3 \text{ (참)}$$

ㄷ. $0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<2$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^2 |v(t)|dt$$
$$=\int_0^2 |3t^2-10t+7|dt$$
$$=\int_0^1 (3t^2-10t+7)dt + \int_1^2 \{-(3t^2-10t+7)\}dt$$
$$=\left[t^3-5t^2+7t\right]_0^1-\left[t^3-5t^2+7t\right]_1^2$$
$$=3-\{(8-20+14)-3\}$$
$$=4 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

12. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이해하고 주어진 삼각형의 넓이를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(t,\ a^t)$, $B(2t,\ a^{2t})$

이고 점 C의 좌표는 $C(2t,\ 0)$이다.

또한 삼각형 ACB는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발 H는 선분 BC의 중점이다.

이때 $H(2t,\ a^t)$이므로

$2a^t=a^{2t}$

$a^t=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 삼각형 ACB의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times(2t-t)\times a^{2t}=8$

$t\times(a^t)^2=16$

㉠에서 $a^t=2$이므로

$t\times2^2=16$

$t=4$

즉 $a^4=2$ 이고 $a>1$이므로

$a=2^{\frac{1}{4}}$

따라서

$a\times t=2^{\frac{1}{4}}\times4=2^{\frac{1}{4}+2}=2^{\frac{9}{4}}$

정답 ①

13. **출제의도** : 함수의 극한값이 존재하도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2+6x+12=(x+3)^2+3>0$

모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x \to a}\frac{x^2}{(f(x))^2-k(x+2)f(x)}$의 값이 존재하는 경우를 다음 두 가지 경우로 나누어 조사하자.

(i) 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x \to a}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\} \neq 0$인 경우

$\lim_{x \to a}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}$

$=(f(a))^2-k(a+2)f(a)$

$=f(a)\{f(a)-k(a+2)\}$에서

$f(a)>0$이므로

$f(a) \neq k(a+2)$

x에 대한 방정식 $f(x)=k(x+2)$의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이차방정식

$x^2+6x+12=kx+2k$

즉, $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(6-k)^2-4(12-2k)<0$

이어야 한다.

$k^2-4k-12<0$

$(k+2)(k-6)<0$

$-2<k<6$

(ii) $\lim_{x \to a}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}=0$ 인 실수 a가 존재하는 경우

$\lim_{x \to a}x^2=0$이어야 하므로

$a^2=0$, $a=0$

$\lim_{x \to 0}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}$

$=(f(0))^2-2kf(0)$

$=f(0)(f(0)-2k)=0$

$f(0)>0$이므로 $f(0)=2k$

즉, $12=2k$에서

$k=6$

이때,

$\lim_{x \to 0}\frac{x^2}{(f(x))^2-6(x+2)f(x)}$

$=\lim_{x \to 0}\frac{x^2}{f(x)(f(x)-6x-12)}$

$=\lim_{x \to 0}\frac{x^2}{(x^2+6x+12)x^2}$

$=\lim_{x \to 0}\frac{1}{x^2+6x+12}=\frac{1}{12}$

이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $-2<k \leq 6$이므로

조건을 만족시키는 모든 정수 k는

-1, 0, 1, $\cdots$, 6이고 그 개수는 8이다.

정답 ④

14. 출제의도 : 삼각함수의 주기와 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

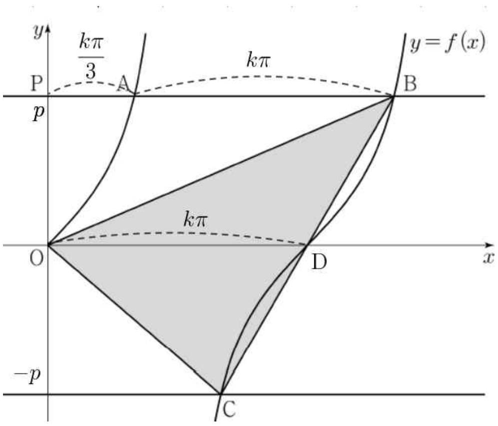
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 D라 하자.

함수 $y=\tan\frac{x}{k}$의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{1}{k}}=k\pi$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OD}}=k\pi$

$\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{PA}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{k\pi}{3}$



점 A의 좌표가 $\left(\frac{k\pi}{3}, p\right)$이고 점 A가 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$의 그래프 위의 점이므로

$p=\tan\left(\frac{1}{k}\times\frac{k\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$이고

(삼각형 OCB의 넓이)

=(삼각형 ODB의 넓이)

+(삼각형 OCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times p+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times p$

$=2\times\frac{1}{2}\times k\pi\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}\,k\pi$

이므로

$\sqrt{3}\,k\pi=\frac{5\pi}{3}$

$k=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

따라서

$k+p=\frac{5\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}$

$=\frac{14\sqrt{3}}{9}$

정답 ③

15. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$를 정한 후 $f(8)$의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\int_0^x(|f(t)|-|t|)dt$에서

$g'(x)=|f(x)|-|x|$

이때 조건 (나)에서 $g'(2)=0$, $g'(6)=0$ 이므로

$|f(2)|=2$, $|f(6)|=6$

즉,

$f(2)=-2$ 또는 $f(2)=2$ 이고

$f(6)=-6$ 또는 $f(6)=6$

또한 주어진 조건에서 $f(0)=0$이다.

그리고 조건 (가)에 의하여 방정식

$f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$

의 서로 다른 실근의 개수가 4이다.

(i) $f(0)=0$, $f(2)=2$, $f(6)=6$일 때

방정식 $f(x)=x$가 $x=0$, $x=2$, $x=6$의 세 실근을 가지므로

$f(x)-x=kx(x-2)(x-6)$

$f(x)=kx(x-2)(x-6)+x$

(k는 양의 상수)

라 하자.

이때 방정식 $f(x)=-x$가 0이 아닌 한 실근을 가져야 조건 (가)를 만족시키므로

$kx(x-2)(x-6)+x=-x$

$x\{k(x-2)(x-6)+2\}=0$

$x(kx^2-8kx+12k+2)=0$

에서 x에 대한 이차방정식

$kx^2-8kx+12k+2=0$이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4k)^2-k(12k+2)$$
$$=4k^2-2k$$
$$=2k(2k-1)$$
$$=0$$

에서 $k>0$이므로 $k=\frac{1}{2}$

$kx^2-8kx+12k+2=0$에서

$\frac{1}{2}x^2-4x+8=0$, $x^2-8x+16=0$

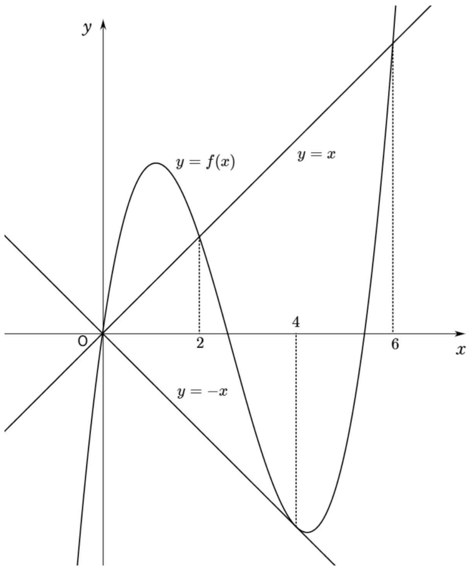
$(x-4)^2=0$, $x=4$

따라서 함수

$f(x)=\frac{1}{2}x(x-2)(x-6)+x$

의 그래프는 그림과 같고

$g(2)=\int_0^2(|f(t)|-|t|)dt>0$



이때 $f(6)\times g(2)<0$에서 $g(2)<0$이므로 모순이다.

(ⅱ) $f(0)=0$, $f(2)=2$, $f(6)=-6$일 때
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $f(6)=-6$이므로
$x>6$일 때 직선 $y=x$와 반드시 교점을 갖는다.

따라서 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x$가 $x=6$에서 접해야 한다.
그러나 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=6$에서 극값을 가지므로 모순이다.

(ⅲ) $f(0)=0$, $f(2)=-2$, $f(6)=-6$일 때
방정식 $f(x)=-x$ 에서 $x=0$, $x=2$, $x=6$의 세 실근을 가지므로

$f(x)+x=kx(x-2)(x-6)$

$f(x)=kx(x-2)(x-6)-x$

(k는 양의 상수)

라 하자.
이때 $f(x)=x$가 0이 아닌 한 실근을 가져야 조건 (가)를 만족시킨다.

$kx(x-2)(x-6)-x=x$

$x\{k(x-2)(x-6)-2\}=0$

$x(kx^2-8kx+12k-2)=0$

에서 x에 대한 이차방정식 $kx^2-8kx+12k-2=0$이 0이 아닌 중근을 갖거나 또는 $x=0$의 근과 0이 아닌 다른 한 근을 가져야 한다.
따라서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4k)^2-k(12k-2)$$
$$=4k^2+2k$$
$$=2k(2k+1)$$
$$=0$$

에서

$k=0$ 또는 $k=-\frac{1}{2}$

그런데 $k>0$이므로 모순이다.

$x=0$의 근을 가지면 $12k-2=0$에서

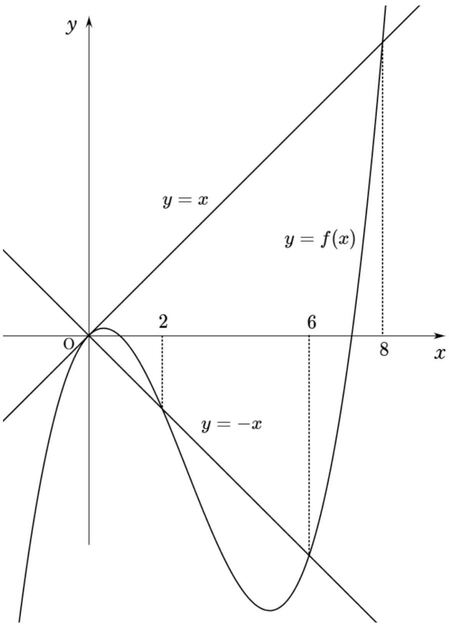
$k=\frac{1}{6}$

따라서 함수

$$f(x)=\frac{1}{6}x(x-2)(x-6)-x$$

의 그래프는 그림과 같고

$$g(2)=\int_0^2(|f(t)|-|t|)dt<0$$



이때 $f(6)\times g(2)<0$에서 $g(2)>0$이므로 모순이다.

(ⅳ) $f(0)=0$, $f(2)=-2$, $f(6)=6$일 때

$f(x)=kx^3+px^2+qx$ (k는 양의 상수, p, q는 상수)라 하자.

이때

$f(2)=8k+4p+2q=-2$ …… ㉠

$f(6)=216k+36p+6q=6$ …… ㉡

이므로 $2<x<6$에서 $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 반드시 존재한다.

이때, $f(6)\times g(2)<0$ 에서

$g(2)<0$이어야 하고, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로 $2<x<6$에서 방정식

$|f(x)|=x$를 만족시키는 x의 값이 반드시 존재한다.

즉, $x<0$에서 방정식 $f(x)=-x$는 근을 갖지 않아야 조건 (가)를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 $x=0$에서 접해야 한다.

이때 $f'(x)=3kx^2+2px+q$이므로

$f'(0)=q=1$

㉠, ㉡에 대입하면

$$k=\frac{1}{4},\ p=-\frac{3}{2}$$

이므로

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+x$$

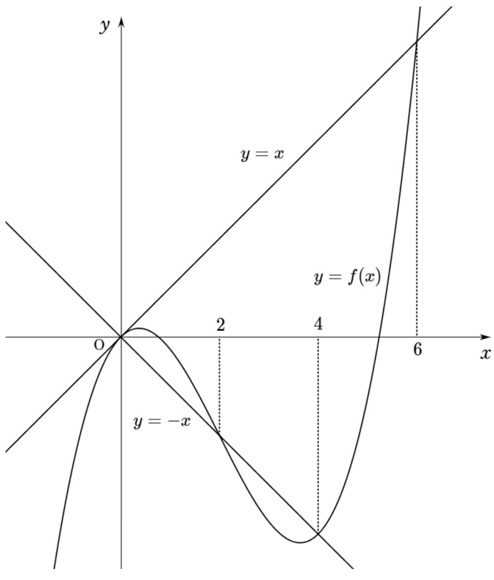
이상에서 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+x$이므로

$$f(8)=\frac{1}{4}\times 8^3-\frac{3}{2}\times 8^2+8=40$$

정답 ⑤

[참고]

주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



16. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열에서 a_3의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=1$이고 $a_{n+1}=na_n+2$이므로

$a_2=1\times a_1+2=3$

따라서

$a_3=2\times a_2+2=8$

정답 8

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+2x+1$이므로

$$f(x)=\int f(x)dx$$

$$=\int(3x^2+2x+1)dx$$

$$=x^3+x^2+x+C$$

(단, C는 적분상수)

$f(1)=1+1+1+C=6$에서

$C=3$

따라서

$f(x)=x^3+x^2+x+3$

이므로

$f(2)=8+4+2+3=17$

정답 17

18. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=6$에서

$a_1+2d=6$ …… ㉠

$2a_5-a_4=15$에서

$2(a_1+4d)-(a_1+3d)=15$

$a_1+5d=15$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$3d=9$

$d=3$

㉠에서 $a_1+6=6$이므로

$a_1=0$

따라서

$a_{11}=a_1+10d=0+10\times3=30$

정답 30

19. 출제의도 : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3-3ax^2+5a$에서

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

이때 함수 $f(x)$는 극솟값을 가지므로

$a\neq0$이다.

(ⅰ) $a<0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$f(0)=5a=a$

$a=0$

$a<0$이므로 모순이다.

(ⅱ) $a>0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로

$f(a)=2a^3-3a^3+5a=-a^3+5a=a$

$a^3-4a=0$, $a(a+2)(a-2)=0$

이때 $a>0$이므로

$a=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=2x^3-6x^2+10$이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므

로 구하는 극댓값은
$f(0)=10$

정답 10

20. 출제의도 : 원의 성질과 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\angle BPC=\theta$라 할 때,
$\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이므로
삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\theta=\frac{6}{7}$이다.
$\overline{PB}:\overline{PC}=7:5$에서 $\overline{PB}=7k$, $\overline{PC}=5k$,
$\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$에서 $\overline{AB}=l$, $\overline{CD}=3l$이라 하자.
원의 성질에 의하여
삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로
$\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PA}$이고,
$\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}=5k+3l$,
$\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{AB}=7k+l$
이므로 $\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PA}$에서
$7:5=(5k+3l):(7k+l)$
$5(5k+3l)=7(7k+l)$
$l=\boxed{3}\times k$이다.
$\overline{PD}=5k+3l=14k$이므로
$\overline{PB}:\overline{PD}=7k:14k=1:2$
즉, 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1:\boxed{2}$이므로
$\overline{BC}=\frac{1}{\boxed{2}}\times\overline{AD}$이다.

$\cos\theta=\frac{6}{7}$에서

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{7}$$

한편,

$$\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{13}=2\sqrt{13}$$

따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때, 삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$$R=\frac{\overline{BC}}{2\sin\theta}=\frac{2\sqrt{13}}{2\times\frac{\sqrt{13}}{7}}=\boxed{7}$$

따라서 $p=3$, $q=2$, $r=7$이므로
$p+q+r=3+2+7=12$

정답 12

21. 출제의도 : 함수의 극대, 극소를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

(단, a, b, c는 상수)

로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2 \le \frac{f(2x)-f(0)}{2x} \le x^4$$

이므로

$$\frac{3x^2+2ax+b}{2}+x^2-2 \le \frac{8x^3+4ax^2+2bx}{2x} \le x^4$$

$5x^2+2ax+b-4 \le 8x^2+4ax+2b \le 2x^4$

즉,

$-3x^2-4 \le 2ax+b \le x^4-4x^2$ …… ㉠

이때

$g(x)=-3x^2-4$, $h(x)=x^4-4x^2$

이라 하면 곡선 $y=g(x)$는 꼭짓점의 좌표가 $(0, -4)$인 위로 볼록한 포물선이다.

또,

$h'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)=0$

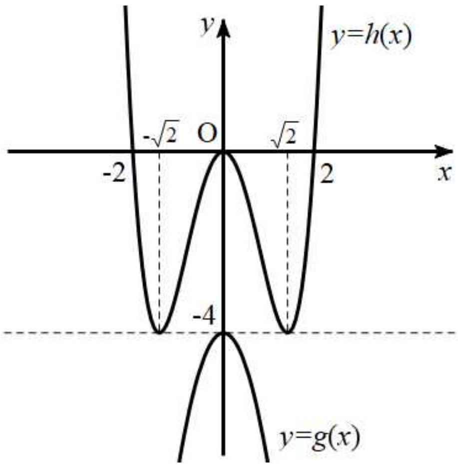
에서

$x=0$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$

이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

즉, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 부등식 ㉠을 만족시키려면 직선 $y=2ax+b$가 $y=-4$이어야 한다.

즉, $a=0$, $b=-4$이므로

$f'(x)=3x^2-4$

따라서

$f'(10)=3\times10^2-4=296$

정답 296

22. **출제의도** : 로그함수의 그래프와 로그의 성질을 이용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B가 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로 두 점 A, B를

$\mathrm{A}(a,\ \log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\ \log_2 b)$

(단, a, b는 양수)

로 놓을 수 있다.

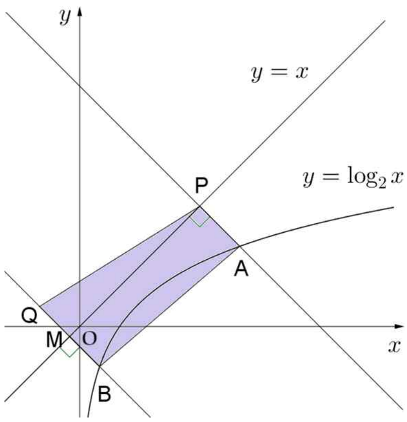
조건 (가)에서

(직선 AP의 y절편)

$-$ (직선 BQ의 y절편)

$=\dfrac{13}{2}$

이므로 $a>b$이다.
점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발이 점 P이므로 직선 AP의 기울기는 -1이다.
이때, 직선 AP의 방정식은
$y-\log_2 a=-(x-a)$
즉, $y=-x+a+\log_2 a$
이므로 직선 AP의 y절편은 $a+\log_2 a$이다.
점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는 $(\log_2 b,\ b)$이고, 직선 BQ의 기울기는 -1이다.
이때, 직선 BQ의 방정식은
$y-\log_2 b=-(x-b)$
즉, $y=-x+b+\log_2 b$
이므로 직선 BQ의 y절편은 $b+\log_2 b$이다.
조건 (가)에 의하여
$(a+\log_2 a)-(b+\log_2 b)=\dfrac{13}{2}$
이므로
$(a-b)+(\log_2 a-\log_2 b)=\dfrac{13}{2}$ …… ㉠
한편, 조건 (나)에서 직선 AB의 기울기가 $\dfrac{6}{7}$이므로
$\dfrac{\log_2 a-\log_2 b}{a-b}=\dfrac{6}{7}$
$\log_2 a-\log_2 b=\dfrac{6}{7}(a-b)$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$(a-b)+\dfrac{6}{7}(a-b)=\dfrac{13}{2}$
$\dfrac{13}{7}(a-b)=\dfrac{13}{2}$
$a-b=\dfrac{7}{2}$ …… ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$\log_2 a-\log_2 b=\dfrac{6}{7}\times\dfrac{7}{2}$
$\log_2 \dfrac{a}{b}=3$
$\dfrac{a}{b}=2^3$
$a=8b$ …… ㉣
㉣을 ㉢에 대입하면
$8b-b=\dfrac{7}{2}$
$7b=\dfrac{7}{2}$
$b=\dfrac{1}{2}$
$b=\dfrac{1}{2}$을 ㉣에 대입하면
$a=8\times\dfrac{1}{2}=4$
직선 AP의 방정식은
$y=-x+6$
이고, 직선 AP와 직선 $y=x$의 교점이 점 P이므로
$-x+6=x$에서
$x=3$
즉 점 P의 좌표는 $(3,\ 3)$
한편, 세 점 A, B, Q는
$\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{Q}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$
선분 BQ의 중점을 M이라 하면
$\mathrm{M}\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{4}\right)$이고 $\angle\mathrm{PMB}=90^\circ$이다.



이때

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(3-4)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left\{\frac{1}{2}-(-1)\right\}^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}-3\right)^2+\left(-\frac{1}{4}-3\right)^2}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$

이므로 사각형 APQB의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}})\times\overline{\mathrm{PM}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{13\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{65}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=65$이므로

$p+q=8+65$

$=73$

정답 73

■ **[선택: 기하]**
23. ② **24.** ④ **25.** ① **26.** ① **27.** ②
28. ④ **29.** 396 **30.** 69

23. 출제의도 : 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2=8x$, 즉 $y^2=4\times2\times x$의 초점의 좌표는 $(2, 0)$이다.

따라서 $p=2$

정답 ②

24. 출제의도 : 방향벡터를 이용하여 두 직선이 평행하도록 하는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 직선

$\frac{x-1}{2}=y-4$, $\frac{x+2}{8}=\frac{y+5}{a}$

의 방향벡터를 각각

$\vec{u}=(2, 1)$, $\vec{v}=(8, a)$

라 하자.

두 직선이 서로 평행하려면 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$가 서로 평행해야 하므로

$k\vec{u}=\vec{v}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

즉, $2k=8$, $k=a$이어야 하므로

$k=4$

따라서 $a=4$

정답 ④

25. **출제의도** : 좌표공간에서 점을 대칭이동한 점의 좌표와 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $A(4, 3, -9)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$B(4, 3, 9)$

또, 점 $A(4, 3, -9)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$C(-4, -3, 9)$

따라서 선분 BC의 길이는

$$\overline{BC}=\sqrt{(-4-4)^2+(-3-3)^2+(9-9)^2}$$
$$=\sqrt{64+36}$$
$$=10$$

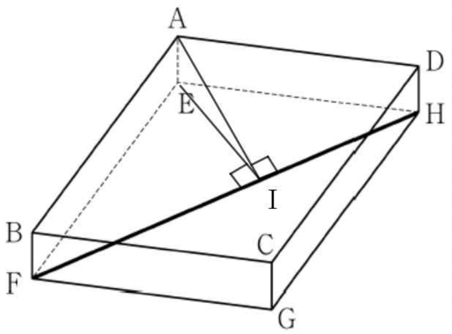
정답 ①

26. **출제의도** : 삼수선의 정리를 이용하여 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 점 E이고, 점 E에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 두 선분 AI와 FH는 서로 수직이다.

그러므로 점 A와 직선 FH 사이의 거리는 선분 AI의 길이와 같다.



직각삼각형 EFH에서 $\overline{EF}=10$, $\overline{EH}=5$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{FH}^2=\overline{EF}^2+\overline{EH}^2$$
$$=10^2+5^2$$
$$=125$$

$\overline{FH}=5\sqrt{5}$

직각삼각형 EFH의 넓이를 구하는 식에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{EH}=\frac{1}{2}\times\overline{FH}\times\overline{EI}$$

$$\frac{1}{2}\times10\times5=\frac{1}{2}\times5\sqrt{5}\times\overline{EI}$$

$\overline{EI}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 AEI에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AI}^2=\overline{AE}^2+\overline{EI}^2$$
$$=1^2+(2\sqrt{5})^2$$
$$=21$$

$\overline{AI}=\sqrt{21}$

따라서 점 A와 직선 FH 사이의 거리는

$\overline{AI}=\sqrt{21}$

정답 ①

27. **출제의도** : 쌍곡선의 정의를 이용하여 곡선 위의 점의 좌표를 구하고, 그 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선의 방정식이 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$이므로

$c^2=9+16=25$

즉, 두 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(0,5)$, $\mathrm{F}'(0,-5)$

점 P가 제2사분면에 있으므로

$\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF}'}$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=8$ …… ㉠

삼각형 PF′F의 둘레의 길이가 30이고

$\overline{\mathrm{FF}'}=10$이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{PF}}=6$, $\overline{\mathrm{PF}'}=14$

점 P의 좌표를 (a,b)라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}^2=a^2+(b-5)^2=36$ …… ㉢

$\overline{\mathrm{PF}'}^2=a^2+(b+5)^2=196$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $a<0$, $b>0$이므로

$a=-3\sqrt{3}$, $b=8$

즉, $\mathrm{P}(-3\sqrt{3},8)$이므로 주어진 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{-3\sqrt{3}x}{9}-\frac{8y}{16}=-1$$

$$y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

정답 ②

28. 출제의도 : 구의 방정식과 정사영의 성질의 이용하여 두 평면이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구 $S: x^2+y^2+z^2=36$은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 6인 구이다.

두 점 A, B가 모두 구 S 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=6$

두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자.

조건 (가)에서 점 C가 선분 OA 위의 점이므로 점 C에서 직선 AA′에 내린 수선의 발은 선분 AA′ 위에 있다.

이 수선의 발을 H라 하자.

이때 직선 BC와 xy평면이 서로 평행하므로 두 점 B, C의 z좌표가 서로 같고, 점 B에서 선분 AA′에 내린 수선의 발도 점 H이다.

두 직선 OA, AB와 xy평면이 이루는 예각의 크기가 각각 α, β이고 두 평면 BHC, xy평면이 서로 평행하므로

$\angle\mathrm{ACH}=\alpha$, $\angle\mathrm{ABH}=\beta$

두 직각삼각형 ACH, ABH에서

$$\sin\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AC}}},\ \sin\beta=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

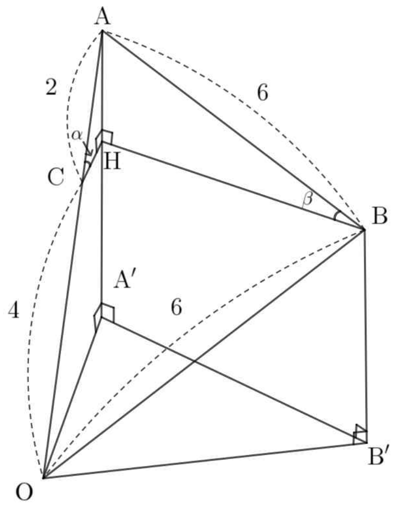
이고 조건 (나)에서 $\sin\alpha=3\sin\beta$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=3\times\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AB}}},\ \text{즉}\ \overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{AC}}$$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OC}}=6-4=2$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{AC}}=3\times2=6$

그러므로 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다.



$\overline{\mathrm{AH}}=h$라 하면 두 직선 CH, OA′이 서로 평행하므로

$\overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{HA'}} = \overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{CO}}$

$h : \overline{\mathrm{HA'}} = 2 : 4$

$\overline{\mathrm{HA'}} = 2h$

직각삼각형 AOA′에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OA'}}^2 + \overline{\mathrm{AA'}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2$

$\overline{\mathrm{OA'}}^2 + (3h)^2 = 6^2$

$\overline{\mathrm{OA'}} = \sqrt{36-9h^2}$ …… ㉠

직각삼각형 OB′B에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OB'}}^2 + \overline{\mathrm{B'B}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2$

$\overline{\mathrm{OB'}}^2 + \overline{\mathrm{A'H}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2$

$\overline{\mathrm{OB'}}^2 + (2h)^2 = 6^2$

$\overline{\mathrm{OB'}} = \sqrt{36-4h^2}$ …… ㉡

직각삼각형 AHB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{HB}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2$

$h^2 + \overline{\mathrm{HB}}^2 = 6^2$

$\overline{\mathrm{HB}} = \sqrt{36-h^2}$

$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{HB}}$이므로

$\overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{36-h^2}$ …… ㉢

조건에서 삼각형 OAB의 xy평면 위로의 정사영인 삼각형 OA′B′이 직각삼각형이다.

이때 ㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{\mathrm{A'B'}} > \overline{\mathrm{OB'}} > \overline{\mathrm{OA'}}$이므로 직각삼각형 OA′B′의 빗변의 길이는 $\overline{\mathrm{A'B'}}$이고 밑변과 높이의 길이는 $\overline{\mathrm{OB'}}$, $\overline{\mathrm{OA'}}$이다.

직각삼각형 OA′B′에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{A'B'}}^2 = \overline{\mathrm{OB'}}^2 + \overline{\mathrm{OA'}}^2$

$36-h^2 = (36-4h^2)+(36-9h^2)$

$h^2 = 3$

$h = \sqrt{3}$

삼각형 OAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로 삼각형 OAB의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$$

삼각형 OA′B′은 밑변과 높이의 길이가

$\overline{\mathrm{OA'}} = \sqrt{36-9h^2} = 3$,

$\overline{\mathrm{OB'}} = \sqrt{36-4h^2} = 2\sqrt{6}$

인 직각삼각형이므로 삼각형 OA′B′의 넓이를 S'라 하면

$$S' = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

따라서 평면 OAB와 xy평면이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$S\cos\theta = S'$이므로

$$\cos\theta = \frac{S'}{S} = \frac{3\sqrt{6}}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 타원의 정의를 이용하여 타원의 장축의 길이를 구할 수 있는가?

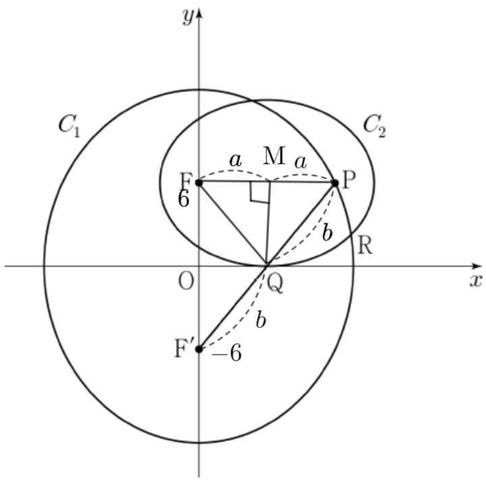
정답풀이 :

두 초점이 P, F인 타원 C_2의 꼭짓점 중 하나가 점 Q이므로 $\overline{QP}=\overline{QF}$이고 점 Q에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{MP}=\overline{MF}$이다.

두 직선 FF′, MQ가 서로 평행하므로 두 삼각형 PMQ, PFF′은 닮음비가 $\overline{PM}:\overline{PF}=1:2$인 닮은 삼각형이다.

이때 $\overline{MQ}=\dfrac{1}{2}\overline{FF'}=\dfrac{1}{2}\times 12=6$이다.

$\overline{MP}=a$, $\overline{PQ}=b$라 하자.



직각삼각형 PMQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{PQ}^2=\overline{MP}^2+\overline{MQ}^2$$

$$b^2=a^2+6^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 R, P가 두 초점이 F, F′인 타원 C_1 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FR}+\overline{F'R}=\overline{FP}+\overline{F'P}$$

$$\overline{FR}+\overline{F'R}=2a+2b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

두 점 R, Q가 두 초점이 F, P인 타원 C_2 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FR}+\overline{PR}=\overline{FQ}+\overline{PQ}$$

$$\overline{FR}+\overline{PR}=2b \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡−㉢에서

$$\overline{F'R}-\overline{PR}=2a$$

조건에서 $\overline{F'R}-\overline{PR}=7\sqrt{2}$이므로

$$2a=7\sqrt{2}$$

$$a=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

㉠에서

$$b^2=\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2+6^2=\frac{49}{2}+36=\frac{121}{2}$$

$$b=\frac{11}{\sqrt{2}}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$$

㉡에서 타원 C_1의 장축의 길이는

$$2a+2b=7\sqrt{2}+11\sqrt{2}=18\sqrt{2}$$

㉢에서 타원 C_2의 장축의 길이는

$$2b=11\sqrt{2}$$

따라서 두 타원 C_1, C_2의 장축의 길이의 곱은

$$18\sqrt{2}\times 11\sqrt{2}=396$$

정답 396

30. **출제의도** : 벡터의 내적과 벡터 사이의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PQ})\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

이므로 선분 BQ의 중점을 D라 하면

$$2\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

즉, $\overrightarrow{PD}\perp\overrightarrow{BC}$이므로 삼각형 PBQ는 $\overline{PB}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이고

$$\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{AC}$$

또, $(\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{RQ})\cdot\overrightarrow{BC}=0$

이므로 선분 QC의 중점을 E라 하면

$2\overrightarrow{RE}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

즉, $\overrightarrow{RE}\perp\overrightarrow{BC}$이므로 삼각형 RQC는

$\overline{RQ}=\overline{RC}$인 이등변삼각형이고

$\overline{RQ}\,/\!/\,\overline{AB}$

조건 (나)에서

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=|\overrightarrow{QP}|^2$

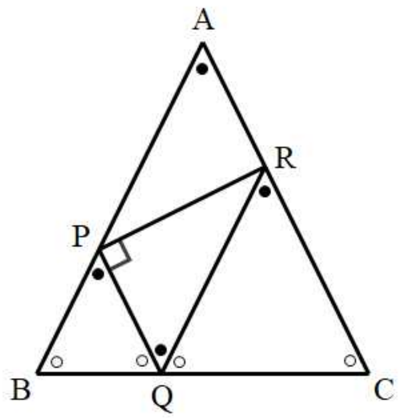
이므로 $\angle PQR=\theta$라 하면

$|\overrightarrow{QR}|\cos\theta=|\overrightarrow{QP}|$

에서

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{QP}|}{|\overrightarrow{QR}|}$$

이를 만족시키려면 $\angle RPQ=\frac{\pi}{2}$이어야 하므로 주어진 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(8\sqrt{5})^2+(8\sqrt{5})^2-16^2}{2\times8\sqrt{5}\times8\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$$

이고, $\angle PQR=\angle A$이므로

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}}=\frac{3}{5}$$

이때 두 삼각형 PBQ, RQC는 서로 닮음이므로

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{RC}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}}=\frac{3}{5}$$

이고, $\overline{BQ}+\overline{QC}=16$이므로

$\overline{BQ}=6$, $\overline{QC}=10$

그러므로

$\overline{PQ}=3\sqrt{5}$, $\overline{RQ}=5\sqrt{5}$, $\overline{PR}=4\sqrt{5}$

한편, 선분 PR을 $1:3$으로 내분하는 점을 S라 하면

$$\overrightarrow{XS}=\frac{\overrightarrow{XR}+3\overrightarrow{XP}}{1+3}$$

이므로

$3\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XR}=4\overrightarrow{XS}$

이다. 즉,

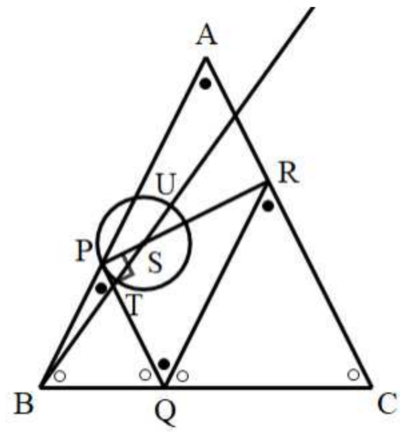
$|3\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XR}|=|\overrightarrow{PR}|$

을 만족시키는 점 X는

$|\overrightarrow{XS}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{PR}|$

을 만족시킨다.

그러므로 점 X는 다음 그림과 같이 선분 PR을 $1:3$으로 내분하는 점 S를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원 위를 움직인다.



위 그림과 같이 직선 BS가 원과 만나는

점 중 B와 가까운 점을 T, 먼 점을 U
라 하면
$|\overrightarrow{\mathrm{BT}}| \le |\overrightarrow{\mathrm{BX}}| \le |\overrightarrow{\mathrm{BU}}|$
이므로
$M = |\overrightarrow{\mathrm{BU}}|$, $m = |\overrightarrow{\mathrm{BT}}|$
이다.
한편, 삼각형 PBS에서
$\overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PQ}} = 3\sqrt{5}$,
$\overline{\mathrm{PS}} = \frac{1}{4}\overline{\mathrm{PR}} = \frac{1}{4} \times 4\sqrt{5} = \sqrt{5}$,
$\angle\mathrm{SPB} = \frac{\pi}{2} + \angle\mathrm{BPQ} = \frac{\pi}{2} + \angle\mathrm{A}$
이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BS}}^2 &= \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PS}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{PB}} \times \overline{\mathrm{PS}} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \angle\mathrm{A}\right) \\ &= 45 + 5 + 30 \times \sin(\angle\mathrm{A}) \\ &= 50 + 30 \times \frac{4}{5} \\ &= 74\end{aligned}$$

따라서
$M = \sqrt{74} + \sqrt{5}$, $m = \sqrt{74} - \sqrt{5}$
이므로

$$\begin{aligned}M \times m &= (\sqrt{74} + \sqrt{5})(\sqrt{74} - \sqrt{5}) \\ &= 74 - 5 = 69\end{aligned}$$

정답 69