2026학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

# 수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학 I ·수학 II]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01. ④ | 02. ④ | 03. ⑤ | 04. ① | 05. ② |
| 06. ⑤ | 07. ① | 08. ③ | 09. ② | 10. ③ |
| 11. ⑤ | 12. ① | 13. ④ | 14. ③ | 15. ⑤ |
| 16. 8 | 17. 17 | 18. 30 | 19. 10 | |
| 20. 12 | 21. 296 | 22. 73 | | |

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$5^{\sqrt{2}+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$

$= 5^{\sqrt{2}+1} \times 5^{-\sqrt{2}}$

$= 5^{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}$

$= 5^1$

$= 5$

정답 ④

2. **출제의도** : 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f'(x) = 2x - 4$에서

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = f'(4)$$
$$= 2 \times 4 - 4$$
$$= 4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 시그마의 정의를 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\sum_{k=1}^{6} (2a_k - 1) = 2\sum_{k=1}^{6} a_k - \sum_{k=1}^{6} 1$$
$$= 2\sum_{k=1}^{6} a_k - 6 = 30$$

에서 $2\sum_{k=1}^{6} a_k = 36$

따라서 $\sum_{k=1}^{6} a_k = 18$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 그래프를 이용하여 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = (-1) + 2 = 1$

정답 ①

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f'(x) = 2x(x^2 + x - 3) + (x^2 + 2)(2x + 1)$

이므로

$f'(1) = 2 \times (-1) + 3 \times 3$

$= 7$

정답 ②

**6. 출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\cos(\theta-\pi)=\frac{3}{5}$에서

$\cos(\theta-\pi)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

이므로

$-\cos\theta=\frac{3}{5}$, 즉 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\cos\theta<0$이고 조건에서 $\tan\theta<0$이므로

$\theta$는 제2사분면의 각이다.

이때 $\sin\theta>0$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta}\\ &= \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{16}{25}}\\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

**정답** ⑤

**7. 출제의도** : 도함수를 활용하여 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=x^3-5x^2+6x$라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+6$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=3\times3^2-10\times3+6=3$

그러므로 접선의 방정식은

$y-0=3(x-3)$, $y=3x-9$

이 접선이 점 $(5, a)$를 지나므로

$a=3\times5-9=6$

**정답** ①

**8. 출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\log_{\sqrt{2}}a+\log_2 b=2$에서

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}}a+\log_2 b &= 2\log_2 a+\log_2 b\\ &= \log_2 a^2+\log_2 b\\ &= \log_2 a^2 b\\ &= 2\end{aligned}$$

이므로

$a^2 b=2^2$ …… ㉠

$\log_2 a+\log_2 b^2=7$에서

$\log_2 a+\log_2 b^2=\log_2 ab^2=7$

이므로

$ab^2=2^7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면

$a^3b^3=2^2\times2^7=2^{2+7}=2^9$

이고 $a$, $b$가 양의 실수이므로

$(ab)^3=(2^3)^3$

에서

$ab=2^3=8$

**정답** ③

**9. 출제의도** : 도함수의 성질과 부정적분의 정의를 이용하여 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

이고, $G(x)$가 $2f(x)+1$의 한 부정적분이므로

$G'(x)=2f(x)+1$

이때

$H(x)=G(x)-2F(x)$

라 하면

$$H'(x)=G'(x)-2F'(x)$$
$$=2f(x)+1-2f(x)$$
$$=1$$

이므로

$H(x)=x+C$ (단, $C$는 적분상수)

한편, $G(3)=2F(3)$에서

$H(3)=G(3)-2F(3)=0$

이므로

$3+C=0$

즉 $C=-3$이므로

$H(x)=x-3$

따라서

$$G(5)-2F(5)=H(5)$$
$$=5-3=2$$

**정답** ②

10. **출제의도** : 등비수열의 일반항 및 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 등비수열의 합을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$이라 하면

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$r>0$이다.

$a_2=1$에서 $a_1r=1$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{6}(-1)^k S_k=21$에서

$-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5+S_6=21$

$(-S_1+S_2)+(-S_3+S_4)+(-S_5+S_6)=21$

$a_2+a_4+a_6=21$

$a_2+a_2r^2+a_2r^4=21$

$a_2=1$이므로

$1+r^2+r^4=21$

$r^4+r^2-20=0$

$(r^2+5)(r^2-4)=0$

$(r^2+5)(r+2)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

㉠에서 $2a_1=1$이므로

$a_1=\frac{1}{2}$

따라서

$S_2+S_7$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times(2^2-1)}{2-1}+\frac{\frac{1}{2}\times(2^7-1)}{2-1}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{127}{2}=\frac{130}{2}$$

$=65$

**정답** ③

11. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

ㄱ. $v(t)=3t^2-10t+7$

$\quad=(t-1)(3t-7)$

이므로

$v(t)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=\dfrac{7}{3}$

$0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<\dfrac{7}{3}$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 $t(t \geq 0)$일 때 점 P의 위치를 $x(t)$라 하자.

$t=0$일 때 점 P의 위치가 원점이므로

$$x(1)=\int_0^1 v(t)dt$$
$$=\int_0^1 (3t^2-10t+7)dt$$
$$=\left[t^3-5t^2+7t\right]_0^1$$
$$=1-5+7$$
$$=3 \text{ (참)}$$

ㄷ. $0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<2$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 $s$라 하면

$$s=\int_0^2 |v(t)|dt$$
$$=\int_0^2 |3t^2-10t+7|dt$$
$$=\int_0^1 (3t^2-10t+7)dt+\int_1^2 \{-(3t^2-10t+7)\}dt$$
$$=\left[t^3-5t^2+7t\right]_0^1-\left[t^3-5t^2+7t\right]_1^2$$
$$=3-\{(8-20+14)-3\}$$
$$=4 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**정답** ⑤

12. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이해하고 주어진 삼각형의 넓이를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(t,\ a^t)$, $B(2t,\ a^{2t})$

이고 점 C의 좌표는 $C(2t,\ 0)$이다.

또한 삼각형 ACB는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발 H는 선분 BC의 중점이다.

이때 $H(2t,\ a^t)$이므로

$2a^t=a^{2t}$

$a^t=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 삼각형 ACB의 넓이가 8이므로

$\dfrac{1}{2}\times(2t-t)\times a^{2t}=8$

$t\times(a^t)^2=16$

㉠에서 $a^t=2$이므로

$t\times 2^2=16$

$t=4$

즉 $a^4=2$ 이고 $a>1$이므로

$a=2^{\frac{1}{4}}$

따라서

$a\times t=2^{\frac{1}{4}}\times 4=2^{\frac{1}{4}+2}=2^{\frac{9}{4}}$

**정답** ①

13. **출제의도** : 함수의 극한값이 존재하도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=x^2+6x+12=(x+3)^2+3>0$

모든 실수 $a$에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(f(x))^2-k(x+2)f(x)}$의 값이 존재하는 경우를 다음 두 가지 경우로 나누어 조사하자.

( i ) 모든 실수 $a$에 대하여

$\lim_{x\to a}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}\neq 0$인 경우

$\lim_{x\to a}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}$

$=(f(a))^2-k(a+2)f(a)$

$=f(a)\{f(a)-k(a+2)\}$에서

$f(a)>0$이므로

$f(a)\neq k(a+2)$

$x$에 대한 방정식 $f(x)=k(x+2)$의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이차방정식

$x^2+6x+12=kx+2k$

즉, $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(6-k)^2-4(12-2k)<0$

이어야 한다.

$k^2-4k-12<0$

$(k+2)(k-6)<0$

$-2<k<6$

( ii ) $\lim_{x\to a}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}=0$ 인 실수 $a$가 존재하는 경우

$\lim_{x\to a}x^2=0$이어야 하므로

$a^2=0$, $a=0$

$\lim_{x\to 0}\{(f(x))^2-k(x+2)f(x)\}$

$=(f(0))^2-2kf(0)$

$=f(0)(f(0)-2k)=0$

$f(0)>0$이므로 $f(0)=2k$

즉, $12=2k$에서

$k=6$

이때,

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(f(x))^2-6(x+2)f(x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)(f(x)-6x-12)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(x^2+6x+12)x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+6x+12}=\frac{1}{12}$

이므로 조건을 만족시킨다.

( i ), ( ii )에서 $-2<k\le 6$이므로

조건을 만족시키는 모든 정수 $k$는

$-1$, $0$, $1$, $\cdots$ , $6$이고 그 개수는 $8$이다.

**정답 ④**

**14. 출제의도** : 삼각함수의 주기와 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

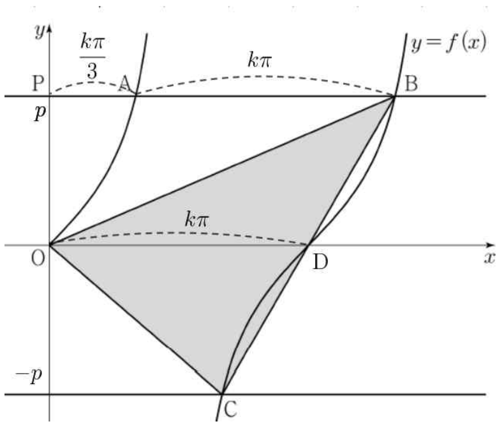
함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 D라 하자.

함수 $y=\tan\frac{x}{k}$의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{1}{k}}=k\pi$이므로

$\overline{AB}=\overline{OD}=k\pi$

$\overline{AB}=3\overline{PA}$이므로

$\overline{PA}=\frac{1}{3}\times\overline{AB}=\frac{k\pi}{3}$




점 A의 좌표가 $\left(\frac{k\pi}{3}, p\right)$이고 점 A가 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$의 그래프 위의 점이므로

$$p=\tan\left(\frac{1}{k}\times\frac{k\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$이고

(삼각형 OCB의 넓이)

=(삼각형 ODB의 넓이)

+(삼각형 OCD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times p+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times p$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times k\pi\times\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}\,k\pi$$

이므로

$$\sqrt{3}\,k\pi=\frac{5\pi}{3}$$

$$k=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

따라서

$$k+p=\frac{5\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}$$

$$=\frac{14\sqrt{3}}{9}$$

**정답 ③**

15. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$를 정한 후 $f(8)$의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$g(x)=\int_0^x(|f(t)|-|t|)dt$에서

$g'(x)=|f(x)|-|x|$

이때 조건 (나)에서 $g'(2)=0$, $g'(6)=0$ 이므로

$|f(2)|=2$, $|f(6)|=6$

즉,

$f(2)=-2$ 또는 $f(2)=2$ 이고

$f(6)=-6$ 또는 $f(6)=6$

또한 주어진 조건에서 $f(0)=0$이다.

그리고 조건 (가)에 의하여 방정식

$f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$

의 서로 다른 실근의 개수가 4이다.

(ⅰ) $f(0)=0$, $f(2)=2$, $f(6)=6$일 때

방정식 $f(x)=x$가 $x=0$, $x=2$, $x=6$의 세 실근을 가지므로

$f(x)-x=kx(x-2)(x-6)$

$f(x)=kx(x-2)(x-6)+x$

($k$는 양의 상수)

라 하자.

이때 방정식 $f(x)=-x$가 0이 아닌 한 실근을 가져야 조건 (가)를 만족시키므로

$kx(x-2)(x-6)+x=-x$

$x\{k(x-2)(x-6)+2\}=0$

$x(kx^2-8kx+12k+2)=0$

에서 $x$에 대한 이차방정식

$kx^2-8kx+12k+2=0$이 중근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4k)^2-k(12k+2)$$
$$=4k^2-2k$$
$$=2k(2k-1)$$
$$=0$$

에서 $k>0$이므로 $k=\frac{1}{2}$

$kx^2-8kx+12k+2=0$에서

$\frac{1}{2}x^2-4x+8=0$, $x^2-8x+16=0$

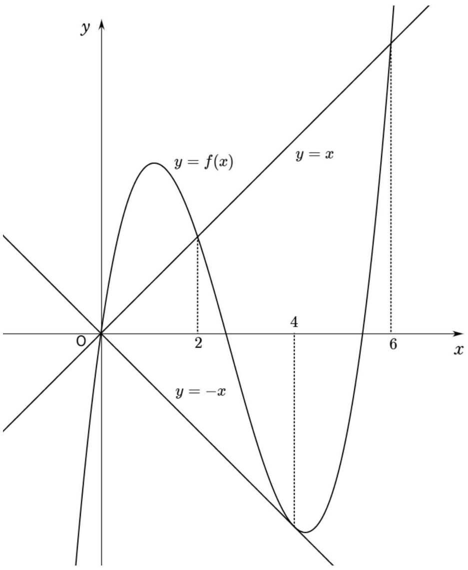
$(x-4)^2=0$, $x=4$

따라서 함수

$f(x)=\frac{1}{2}x(x-2)(x-6)+x$

의 그래프는 그림과 같고

$g(2)=\int_0^2(|f(t)|-|t|)dt>0$




이때 $f(6)\times g(2)<0$에서 $g(2)<0$이므로 모순이다.

(ⅱ) $f(0)=0$, $f(2)=2$, $f(6)=-6$일 때
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $f(6)=-6$이므로
$x>6$일 때 직선 $y=x$와 반드시 교점을 갖는다.
따라서 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x$가 $x=6$에서 접해야 한다.
그러나 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=6$에서 극값을 가지므로 모순이다.

(ⅲ) $f(0)=0$, $f(2)=-2$, $f(6)=-6$일 때
방정식 $f(x)=-x$ 에서 $x=0$, $x=2$, $x=6$의 세 실근을 가지므로
$f(x)+x=kx(x-2)(x-6)$
$f(x)=kx(x-2)(x-6)-x$
($k$는 양의 상수)
라 하자.
이때 $f(x)=x$가 0이 아닌 한 실근을 가져야 조건 (가)를 만족시키므로
$kx(x-2)(x-6)-x=x$
$x\{k(x-2)(x-6)-2\}=0$
$x(kx^2-8kx+12k-2)=0$
에서 $x$에 대한 이차방정식
$kx^2-8kx+12k-2=0$이 중근을 가져야 한다.
따라서 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4k)^2-k(12k-2)$$
$$=4k^2+2k$$
$$=2k(2k+1)$$
$$=0$$

에서

$k=0$ 또는 $k=-\frac{1}{2}$

그런데 $k>0$이므로 모순이다.

(ⅳ) $f(0)=0$, $f(2)=-2$, $f(6)=6$일 때
$f(x)=kx^3+px^2+qx$ ($k$는 양의 상수, $p$, $q$는 상수)라 하자.
이때

$f(2)=8k+4p+2q=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(6)=216k+36p+6q=6 \quad \cdots\cdots$ ㉡

이므로 $2<x<6$에서 $f(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값이 반드시 존재한다.

이때, $f(6)\times g(2)<0$ 에서 $g(2)<0$이어야 하고, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로 $2<x<6$에서 방정식 $|f(x)|=x$를 만족시키는 $x$의 값이 반드시 존재한다.

즉, $x<0$에서 방정식 $f(x)=-x$는 근을 갖지 않아야 조건 (가)를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 $x=0$에서 접해야 한다.

이때 $f'(x)=3kx^2+2px+q$이므로

$f'(0)=q=1$

㉠, ㉡에 대입하면

$k=\frac{1}{4}$, $p=-\frac{3}{2}$

이므로

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+x$

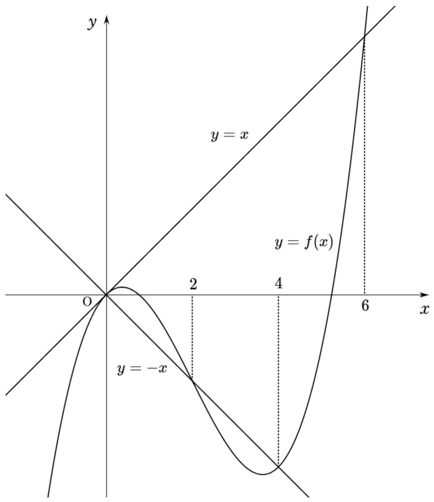
이상에서 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+x$이므로

$f(8)=\frac{1}{4}\times 8^3-\frac{3}{2}\times 8^2+8=40$

**정답** ⑤

**[참고]**

주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




**16. 출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열에서 $a_3$의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$a_1=1$이고 $a_{n+1}=na_n+2$이므로

$a_2=1\times a_1+2=3$

따라서

$a_3=2\times a_2+2=8$

**정답** 8

**17. 출제의도** : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f'(x)=3x^2+2x+1$이므로

$$f(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int(3x^2+2x+1)dx$$
$$=x^3+x^2+x+C$$

(단, $C$는 적분상수)

$f(1)=1+1+1+C=6$에서

$C=3$

따라서

$f(x)=x^3+x^2+x+3$

이므로

$f(2)=8+4+2+3=17$

**정답** 17

**18. 출제의도** : 등차수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면

$a_3=6$에서

$a_1+2d=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2a_5-a_4=15$에서

$2(a_1+4d)-(a_1+3d)=15$

$a_1+5d=15$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡−㉠을 하면

$3d=9$

$d=3$

㉠에서 $a_1+6=6$이므로

$a_1=0$

따라서

$a_{11}=a_1+10d=0+10\times3=30$

**정답** 30

**19. 출제의도** : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=2x^3-3ax^2+5a$에서

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

이때 함수 $f(x)$는 극솟값을 가지므로

$a\neq0$이다.

( i ) $a<0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$f(0)=5a=a$

$a=0$

$a<0$이므로 모순이다.

( ii ) $a>0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로

$f(a)=2a^3-3a^3+5a=-a^3+5a=a$

$a^3-4a=0,\ a(a+2)(a-2)=0$

이때 $a>0$이므로

$a=2$

( i ), ( ii )에서 $f(x)=2x^3-6x^2+10$이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은

$f(0)=10$

**정답** 10

**20. 출제의도** : 원의 성질과 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\angle\mathrm{BPC}=\theta$라 할 때,

$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}:\overline{\mathrm{BC}}=7:5:\sqrt{14}$이므로

삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{6}{7}$이다.

$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=7:5$에서 $\overline{\mathrm{PB}}=7k$, $\overline{\mathrm{PC}}=5k$,

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CD}}=1:3$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=l$, $\overline{\mathrm{CD}}=3l$이라 하자.

원의 성질에 의하여

삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{PA}}$이고,

$\overline{\mathrm{PD}}=\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{CD}}=5k+3l$,

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{AB}}=7k+l$

이므로 $\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{PA}}$에서

$7:5=(5k+3l):(7k+l)$

$5(5k+3l)=7(7k+l)$

$l=\boxed{\ 3\ }\times k$이다.

$\overline{\mathrm{PD}}=5k+3l=14k$이므로

$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PD}}=7k:14k=1:2$

즉, 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1:\boxed{\ 2\ }$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{\boxed{\ 2\ }}\times\overline{\mathrm{AD}}$이다.

$\cos\theta=\dfrac{6}{7}$에서

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{6}{7}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{13}}{7}$$

한편,

$$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}}$$

$$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{13}$$

$$=2\sqrt{13}$$

따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 $R$이라 할 때, 삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$$R=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{2\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sqrt{13}}{2\times\frac{\sqrt{13}}{7}}$$

$$=\boxed{\ 7\ }$$

따라서 $p=3$, $q=2$, $r=7$이므로

$$p+q+r=3+2+7$$

$$=12$$

**정답** 12

21. **출제의도** : 함수의 극대, 극소를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고 미분계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

(단, $a$, $b$, $c$는 상수)

로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 0이 아닌 모든 실수 $x$에 대하여

$$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2\le\frac{f(2x)-f(0)}{2x}\le x^4$$

이므로

$$\frac{3x^2+2ax+b}{2}+x^2-2\le\frac{8x^3+4ax^2+2bx}{2x}\le x^4$$

$$5x^2+2ax+b-4\le8x^2+4ax+2b\le2x^4$$

즉,

$$-3x^2-4\le2ax+b\le x^4-4x^2 \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때

$g(x)=-3x^2-4$, $h(x)=x^4-4x^2$

이라 하면 곡선 $y=g(x)$는 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ -4)$인 위로 볼록한 포물선이다.

또,

$h'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)=0$

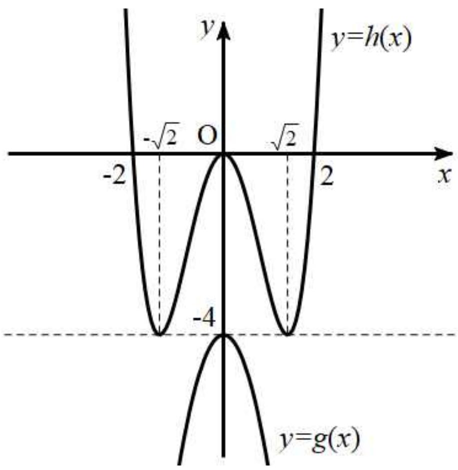
에서

$x=0$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$

이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ |

즉, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.




그러므로 부등식 ㉠을 만족시키려면 직선 $y=2ax+b$가 $y=-4$이어야 한다.

즉, $a=0$, $b=-4$이므로

$f'(x)=3x^2-4$

따라서

$f'(10)=3\times10^2-4=296$

**정답** 296

**22. 출제의도** : 로그함수의 그래프와 로그의 성질을 이용하여 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

두 점 A, B가 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로 두 점 A, B를

$\mathrm{A}(a,\ \log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\ \log_2 b)$

(단, $a$, $b$는 양수)

로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서

(직선 AP의 $y$절편)

$-$ (직선 BQ의 $y$절편)

$=\dfrac{13}{2}$

이므로 $a>b$이다.

점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발이 점 P이므로 직선 AP의 기울기는 $-1$이다.

이때, 직선 AP의 방정식은

$y-\log_2 a=-(x-a)$

즉, $y=-x+a+\log_2 a$

이므로 직선 AP의 $y$절편은 $a+\log_2 a$이다.

점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는 $(\log_2 b,\ b)$이고, 직선 BQ의 기울기는 $-1$이다.

이때, 직선 BQ의 방정식은

$y-\log_2 b=-(x-b)$

즉, $y=-x+b+\log_2 b$

이므로 직선 BQ의 $y$절편은 $b+\log_2 b$이다.

조건 (가)에 의하여

$(a+\log_2 a)-(b+\log_2 b)=\dfrac{13}{2}$

이므로

$$(a-b)+(\log_2 a-\log_2 b)=\frac{13}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 조건 (나)에서 직선 AB의 기울기가 $\frac{6}{7}$이므로

$$\frac{\log_2 a-\log_2 b}{a-b}=\frac{6}{7}$$

$$\log_2 a-\log_2 b=\frac{6}{7}(a-b) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$(a-b)+\frac{6}{7}(a-b)=\frac{13}{2}$$

$$\frac{13}{7}(a-b)=\frac{13}{2}$$

$$a-b=\frac{7}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\log_2 a-\log_2 b=\frac{6}{7}\times\frac{7}{2}$$

$$\log_2\frac{a}{b}=3$$

$$\frac{a}{b}=2^3$$

$$a=8b \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉣을 ㉢에 대입하면

$$8b-b=\frac{7}{2}$$

$$7b=\frac{7}{2}$$

$$b=\frac{1}{2}$$

$b=\frac{1}{2}$을 ㉣에 대입하면

$$a=8\times\frac{1}{2}=4$$

직선 AP의 방정식은

$y=-x+6$

이고, 직선 AP와 직선 $y=x$의 교점이 점 P이므로

$-x+6=x$에서

$x=3$

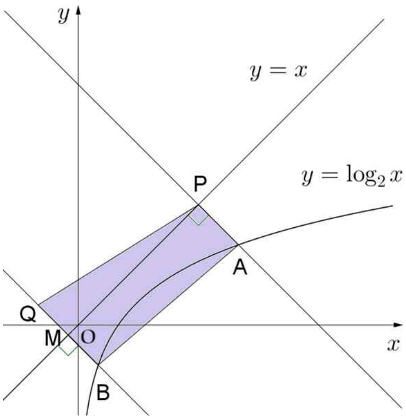
즉 점 P의 좌표는 $(3,\ 3)$

한편, 세 점 A, B, Q는

$\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{Q}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$

선분 BQ의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$이고 $\angle\mathrm{PMB}=90^\circ$이다.




이때

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(3-4)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2},$$

$$\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left\{\frac{1}{2}-(-1)\right\}^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}-3\right)^2+\left(-\frac{1}{4}-3\right)^2}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$$

이므로 사각형 APQB의 넓이를 $S$라 하면

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}})\times\overline{\mathrm{PM}}\\&=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{13\sqrt{2}}{4}\\&=\frac{65}{8}\end{aligned}$$

따라서 $p=8$, $q=65$이므로

$$\begin{aligned}p+q&=8+65\\&=73\end{aligned}$$

**정답** 73

■ [선택: 확률과 통계]

23. ④ 24. ③ 25. ⑤ 26. ② 27. ④

28. ② 29. 23 30. 80

23. **출제의도** : 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

세 문자 $a$, $b$, $c$에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

정답 ④

24. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A^C \cap B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

정답 ③

25. **출제의도** : 수학적 확률을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

8명의 학생 중 임의로 5명의 학생을 선택하는 경우의 수는

$${}_8\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$$

선택된 2학년 학생 수와 선택된 3학년 학생 수가 서로 같은 경우는 1학년 학생 1명을 선택하고 2학년과 3학년 학생을 각각 2명씩 선택하는 경우이므로 이 경우의 수는

$$1 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 1 \times 3 \times \frac{4\times3}{2\times1} = 18$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{18}{56} = \frac{9}{28}$$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

모표준편차가 $2\sqrt{2}$인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 128인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균의 값이 $\overline{x}$일 때, 이를 이용하여 구한 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x} - 1.96 \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{128}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{128}}$$

이고 이 신뢰구간이 $\overline{x} - c \le m \le \overline{x} + c$이므로

$$c = 1.96 \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{128}} = 1.96 \times \frac{1}{4} = 0.49$$

정답 ②

**27. 출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 확률변수 $X$의 확률분포를 구한 후 $\mathrm{V}(X)$를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(ⅰ) $X=0$인 경우

두 상자의 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 두 수가 서로 같아야 하므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}$$
$$=\frac{6}{16}$$

(ⅱ) $X=1$인 경우

두 상자의 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 두 수가 1, 2 또는 2, 3이어야 하므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times2+\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}\times2$$
$$=\frac{4}{16}+\frac{4}{16}$$
$$=\frac{8}{16}$$

(ⅲ) $X=2$인 경우

두 상자의 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 두 수가 1, 3이어야 하므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times2=\frac{2}{16}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{6}{16}+1\times\frac{8}{16}+2\times\frac{2}{16}$$
$$=\frac{12}{16}$$
$$=\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{6}{16}+1^2\times\frac{8}{16}+2^2\times\frac{2}{16}$$
$$=\frac{16}{16}$$
$$=1$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2$$
$$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$=1-\frac{9}{16}$$
$$=\frac{7}{16}$$

**정답** ④

**28. 출제의도** : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 사건의 경우의 수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

빨간색 카드 1장을 세 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수

${}_3\mathrm{C}_1=3$

파란색 카드 1장을 세 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 위와 마찬가지로

3

노란색 카드 3장을 세 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 세 학생 A, B, C가 받는 노란색 카드의 수를 각각 $a_y$, $b_y$, $c_y$라 할 때 방정식 $a_y+b_y+c_y=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a_y$, $b_y$, $c_y$의 순서쌍 $(a_y,\ b_y,\ c_y)$의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

보라색 카드 3장을 세 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 위와 마찬가지로

10

따라서 세 학생 A, B, C에게 8장의 카드를 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$3\times3\times10\times10=900$

( i ) 학생 A가 카드를 한 장도 받지 못하는 경우의 수는 모든 카드를 두 학생 B, C에게만 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

$$\begin{aligned}{}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2H_3\times{}_2H_3&=2^2\times\left({}_{2+3-1}C_3\right)^2\\&=4\times\left({}_4C_1\right)^2\\&=64\end{aligned}$$

( ii ) 학생 B가 카드를 한 장도 받지 못하는 경우의 수는 ( i )과 마찬가지로

64

(iii) 두 학생 A, B 모두 카드를 한 장도 받지 못하는 경우의 수는 모든 카드를 학생 C에게만 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

1

( i ), ( ii ), (iii)에서 규칙 (가)에 따라 카드를 나누어 주는 경우의 수는

$900-(64+64-1)=773$

학생 A가 서로 다른 4가지 색의 카드를 받고 학생 B가 카드를 1장 이상 받는 경우의 수를 구해보자.

학생 A가 빨간색 카드와 파란색 카드, 노란색 카드, 보라색 카드를 각각 1장씩 받으면 남는 카드는 노란색 카드 2장과 보라색 카드 2장뿐이다.

노란색 카드 2장과 보라색 카드 2장을 세 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_3H_2\times{}_3H_2&=\left({}_{3+2-1}C_2\right)^2=\left({}_4C_2\right)^2\\&=6^2=36\end{aligned}$$

한편, 노란색 카드 2장과 보라색 카드 2장을 두 학생 A, C에게만 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_2H_2\times{}_2H_2&=\left({}_{2+2-1}C_2\right)^2=\left({}_3C_1\right)^2\\&=3^2=9\end{aligned}$$

따라서 학생 A가 서로 다른 4가지 색의 카드를 받고 학생 B가 카드를 1장 이상 받는 경우의 수는

$36-9=27$

따라서 규칙 (가), (나)에 따라 카드를 나누어 주는 경우의 수는

$773-27=746$

**정답 ②**

**29. 출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 이항분포를 구한 후 이항분포와 정규분포와의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

집합 $A$의 모든 부분집합 8개 중에서 임의로 한 개를 선택하는 사건을 $C$, 집합 $B$의 모든 부분집합 4개 중에서 임의로 한 개를 선택하는 사건을 $D$라 하면 선택한 두 집합의 교집합의 원소의 개수가 1인 경우는 그 교집합이 $\{2\}$ 또는 $\{3\}$ 일 때이다.

( i ) 교집합이 $\{2\}$일 때

① 사건 $C$에서 $\{2\}$를 선택하면 사건 $D$에서 $\{2\}$ 또는 $\{2,3\}$을 선택하면 된다.

② 사건 $C$에서 $\{2,3\}$을 선택하면 사건 $D$에서 $\{2\}$를 선택하면 된다.

③ 사건 $C$에서 $\{2,4\}$를 선택하면 사건 $D$에서 $\{2\}$ 또는 $\{2,3\}$을 선택하면 된다.

④ 사건 $C$에서 $\{2,3,4\}$를 선택하면 사건 $D$에서 $\{2\}$를 선택하면 된다.

따라서 이 경우의 확률은

$$\frac{2+1+2+1}{8\times4}=\frac{3}{16}$$

( ii ) 교집합이 $\{3\}$일 때

① 사건 $C$에서 $\{3\}$을 선택하면 사건 $D$에서 $\{3\}$ 또는 $\{2,3\}$을 선택하면 된다.

② 사건 $C$에서 $\{2,3\}$을 선택하면 사건 $D$에서 $\{3\}$을 선택하면 된다.

③ 사건 $C$에서 $\{3,4\}$를 선택하면 사건 $D$에서 $\{3\}$ 또는 $\{2,3\}$을 선택하면 된다.

④ 사건 $C$에서 $\{2,3,4\}$를 선택하면 사건 $D$에서 $\{3\}$을 선택하면 된다.

따라서 이 경우의 확률은

$$\frac{2+1+2+1}{8\times 4}=\frac{3}{16}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 선택한 두 집합의 교집합의 원소의 개수가 1일 확률은

$$\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$$

이때 기록한 수가 1인 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15360,\ \frac{3}{8}\right)$을 따른다.

또한

$$\mathrm{E}(X)=15360\times\frac{3}{8}=5760$$

$$\sigma(X)=\sqrt{15360\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}}=60$$

이고 15360은 충분히 큰 수이므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(5760,\ 60^2\right)$을 따른다.

따라서

$$k=\mathrm{P}(X\geq 5880)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{5880-5760}{60}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z\geq 2)\ =0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$$

$$=0.5-0.477\ =0.023$$

따라서

$$1000\times k=1000\times 0.023=23$$

**정답** 23

30. **출제의도** : 여사건의 확률과 확률의 곱셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수 $n$의 값과 주어진 사건의 확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

학생 A가 카드를 내려놓을 확률은

$$\frac{1}{2}$$

이고, 학생 A가 카드를 내려놓게 되는 경우, 내려놓은 카드에 적힌 수는 8이다.

학생 B가 카드를 내려놓을 확률은

$$\frac{n-1}{6}$$

이고, 학생 B가 카드를 내려놓게 되는 경우, 내려놓은 카드에 적힌 수는 $n$ 이하이고 어떤 카드를 내려놓더라도 카드에 적힌 수는 8보다 작다.

학생 A가 카드를 내려놓는 사건을 $A$, 학생 B가 카드를 내려놓는 사건을 $B$라 하자.

학생 A가 귤을 받는 경우는

두 학생 A, B가 모두 카드를 내려놓는 경우이거나, 학생 B만 카드를 내려놓는 경우이므로 확률 $p$는

$$p=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}\left(A^C\right)\times\mathrm{P}(B)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{n-1}{6}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{n-1}{6}$$

$$=\frac{n-1}{6}$$

학생 B가 귤을 받는 경우는

학생 A만 카드를 내려놓는 경우이므로

확률 $q$는

$$q=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}\left(B^C\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{n-1}{6}\right)$$

$$=\frac{7-n}{12}$$

$p=q$에서

$$\frac{n-1}{6}=\frac{7-n}{12}$$

$n=3$

이고

$$p=\frac{3-1}{6}=\frac{1}{3}$$

이므로

$$24(n+p)=24\times\left(3+\frac{1}{3}\right)$$

$$=80$$

**정답** 80

■ **[선택: 미적분]**

23. ① 24. ④ 25. ② 26. ① 27. ①

28. ② 29. 91 30. 31

23. **출제의도** : 지수함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=e^x$라 하면

$f'(x)=e^x$

이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=f'(1)$$

따라서

$f'(1)=e$

**정답** ①

24. **출제의도** : 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$에서

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이다.

이때,

$x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=0$이고

$x=\frac{3\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$$

$$=\int_0^1 e^t\,dt=\Big[\ e^t\ \Big]_0^1$$

$$=e^1-e^0=e-1$$

**정답 ④**

25. **출제의도** : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}=6\text{에서}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{\left(\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}\right)\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{(n^4+4n)-(n^4+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}=6$$

$\cdots\cdots$ ㉠

(ⅰ) $b>-1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}$$

의 값은 존재하지 않으므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $b<-1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}=0$$

이므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $b=-1$일 때,

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^{-1}\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}{3}$$

$$=\frac{2a}{3}$$

이므로

$$\frac{2a}{3}=6$$

$$a=9$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$a=9$, $b=-1$

따라서

$a+b=9+(-1)=8$

**정답 ②**

26. **출제의도** : 정적분을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$1=\dfrac{3}{x-1}$에서 $x=4$이므로

$A(4,\ 1)$

$3=\dfrac{3}{x-1}$에서 $x=2$이므로

$B(2,\ 3)$

직선 AB의 방정식은

$$y-1=\frac{3-1}{2-4}(x-4)$$

$$y=-x+5$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_2^4\left(-x+5-\frac{3}{x-1}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+5x-3\ln|x-1|\right]_2^4$$

$$=(-8+20-3\ln3)-(-2+10-3\ln1)$$

$$=4-3\ln3$$

**정답** ①

[다른 풀이]

두 점 A, B에서 $x$축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면 사각형 ABDC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(1+3)\times2=4$$

따라서 구하는 넓이는

$$4-\int_2^4\frac{3}{x-1}dx=4-\left[3\ln|x-1|\right]_2^4$$

$$=4-3\ln3$$

**27. 출제의도** : 역함수의 미분법을 이용하여 함숫값과 미분계수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

함수 $f(x^3+x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 모든 실수 $x$에 대하여

$$g(f(x^3+x))=x \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

가 성립한다.

$x^3+x=2$에서

$x^3+x-2=0$

$$(x-1)(x^2+x+2)=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이때,

$$x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

이므로 ㉡에서

$x=1$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(f(2))=1$

이고, $f(2)=1$이므로

$g(1)=1$

한편, ㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$g'(f(x^3+x))\times f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=1$$

위 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(2))\times f'(2)\times4=1$

$f(2)=1$이므로

$$4g'(1)\times f'(2)=1 \qquad \cdots\cdots \text{㉢}$$

$f'(2)=8g'(1)-1$을 ㉢에 대입하면

$4g'(1)(8g'(1)-1)=1$

$32(g'(1))^2-4g'(1)-1=0$

$(4g'(1)-1)(8g'(1)+1)=0$

$g'(1)=\frac{1}{4}$ 또는 $g'(1)=-\frac{1}{8}$

(ⅰ) $g'(1)=\frac{1}{4}$일 때,

$$f'(2)=8g'(1)-1$$
$$=8\times\frac{1}{4}-1$$
$$=1>0$$

이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)>0$이라는 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $g'(1)=-\frac{1}{8}$일 때,

$$f'(2)=8g'(1)-1$$
$$=8\times\left(-\frac{1}{8}\right)-1$$
$$=-2<0$$

이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)>0$이라는 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $g'(1)=\frac{1}{4}$이므로

$$g(1)+g'(1)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

**정답** ①

28. **출제의도** : 여러 가지 미분법을 이용하여 미분계수와 함숫값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\sin g(\pi)=0$ 에서 $g(\pi)=n\pi$ 인 정수 $n$이 존재한다.

$$f'(x)=g'(x)-\sec^2 g(x)\times g'(x)$$
$$=g'(x)(1-\sec^2 g(x))$$
$$=-g'(x)\tan^2 g(x)$$

의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$f'(\pi)=-g'(\pi)\tan^2 g(\pi)=0$

조건 (가)에서 $f''(\pi)=0$ 이므로

$f(x)=a(x-\pi)^3+b$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq 0$)

이고

$f(0)=-a\pi^3+b=0$

이므로

$b=a\pi^3$

$f(x)=a(x-\pi)^3+a\pi^3$

그러므로

$f(\pi)=a\pi^3$ 이고

$f(\pi)=g(\pi)-\tan g(\pi)=n\pi$이므로

$a\pi^3=n\pi$ 에서

$a=\dfrac{n}{\pi^2}$

이때 모든 실수 $x$에 대하여 $\tan g(x)$가 정의되기 위해서는 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ($k$는 정수)이어야 한다. …… ㉠

또 $f'(x)=3a(x-\pi)^2$ 이므로

$3a(x-\pi)^2=-g'(x)\tan^2 g(x)$ …… ㉡

(ⅰ) $a>0$인 경우

$x$가 $\pi$가 아닐 때 $g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 감소하고 $n>0$이다.

$x>\pi$일 때, $g(\pi)=n\pi$에서 $g(x)$는 $\dfrac{3}{2}\pi$로 감소한다.

$n\pi>\dfrac{3}{2}\pi$이므로 $n>\dfrac{3}{2}$

$x>\pi$일 때, $\dfrac{3}{2}\pi<g(x)<n\pi$이므로

㉠에서

$n\pi\le\dfrac{5}{2}\pi$, $n\le\dfrac{5}{2}$

즉, $\dfrac{3}{2}<n\le\dfrac{5}{2}$ 이므로 $n=2$

(ⅱ) $a<0$인 경우

$x$가 $\pi$가 아닐 때 $g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 증가하고 $n<0$이다.

$g(\pi)=n\pi$에서 $g(x)$는 $\dfrac{3}{2}\pi$로 증가하는데 ㉠에 의하여 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n=2$이므로

$a=\dfrac{2}{\pi^2}$

$f(0)=g(0)-\tan g(0)=0$에서

$\tan g(0)=g(0)$

$$f'(0)=-g'(0)\tan^2 g(0)$$
$$=-g'(0)(g(0))^2$$

따라서

$$g'(0)\times(g(0))^2=-f'(0)$$
$$=-3a\pi^2$$
$$=-3\times\frac{2}{\pi^2}\times\pi^2=-6$$

**정답** ②

29. **출제의도** : 등비급수의 수렴조건 및 등비수열의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로

$a_1 > 0$

이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$(단, $r$은 유리수)라 하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로

$-1 < r < 1$

이다.

조건 (나)에서 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 3이고 공비가 $-1 < r < 1$이므로 정수인 세 항은 연속해서 나와야 한다.

즉, 세 항 $a_m$, $a_{m+1}$, $a_{m+2}$의 값이 모두 정수인 자연수 $m$이 존재하고, 이때,

$|a_m| > |a_{m+1}| > |a_{m+2}|$

이다.

0이 아닌 실수 $x$에 대하여

$a_m = x$, $a_{m+1} = xr$, $a_{m+2} = xr^2$

이라 하면

조건 (나)에 의해

$a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} = 216$ …… ㉠

이므로

$x \times xr \times xr^2 = 216$

이다.

즉, $(xr)^3 = 216 = 6^3$이고, $xr$이 실수이므로

$xr = 6$

㉠에서

$a_{m+1} = xr = 6$

이므로

$a_m \times 6 \times a_{m+2} = 216$

$a_m \times a_{m+2} = 36$

이때, $a_m$, $a_{m+2}$가 모두 정수이므로

$|a_m| = 36$, $|a_{m+2}| = 1$ 또는

$|a_m| = 18$, $|a_{m+2}| = 2$ 또는

$|a_m| = 12$, $|a_{m+2}| = 3$ 또는

$|a_m| = 9$, $|a_{m+2}| = 4$

(ⅰ) $|a_m| = 9$, $|a_{m+2}| = 4$일 때,

$a_{m+1} = 6$

이므로

$$\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} = \frac{|a_{m+2}|}{|a_{m+1}|} = \frac{2}{3}$$

즉, $|r| = \frac{2}{3}$이므로

$r = \frac{2}{3}$ 또는 $r = -\frac{2}{3}$

ⓐ $r = \frac{2}{3}$일 때,

$a_m = 9$, $a_{m+1} = 6$, $a_{m+2} = 4$

이므로 $a_1$의 최솟값은 9이다.

이때 $a_2 = 6$이므로

$a_1 + a_2 = 9 + 6 = 15 > 10$

이다.

즉, 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

ⓑ $r = -\frac{2}{3}$일 때,

$a_m = -9$, $a_{m+1} = 6$, $a_{m+2} = -4$

이고, $a_1 > 0$이므로

$a_2 = -9$일 때 $a_1$의 값은 최소이다.

이때

$$a_1 = a_2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -9 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{2}$$

이고,

$$a_1 + a_2 = \frac{27}{2} + (-9) = \frac{9}{2} < 10$$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

(ⅱ) $|a_m| > 9$일 때,

$-1 < r < 1$이고 $a_1 > 0$이므로

(ⅰ)과 같은 방법으로 계산해 보면

$a_1 + a_2 \geq 10$

임을 알 수 있다.

즉, 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1=\frac{27}{2}$, $r=-\frac{2}{3}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{27}{2}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{81}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=81$이므로

$p+q=10+81=91$

**정답** 91

[다른 풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로

$a_1>0$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$(단, $r$은 유리수)라 하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$-1<r<1$

이다.

조건 (나)에서 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 3이고 이 세 항의 곱이 216이므로 수열 $\{a_n\}$의 정수인 세 항의 값을

$x$, $y$, $z(|x|>|y|>|z|)$

라 하면

$xyz=216$

이다.

이때, $216=2^3\times3^3$이고

$|x|\times|y|\times|z|=216$

이므로

$|x|$의 값의 최솟값은 9이다.

(ⅰ) $|x|=9$일 때,

$|y|=6$, $|z|=4$

두 수 $|x|$, $|y|$가 등비수열 $\{a_n\}$의 서로 다른 두 항이므로

$$\frac{|y|}{|x|}=|r|^m$$

을 만족시키는 자연수 $m$이 존재한다.

$\frac{|y|}{|x|}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$이므로

$|r|^m=\frac{2}{3}$

이고, 공비 $r$이 유리수이어야 하므로

$m=1$, $|r|=\frac{2}{3}$

이다. 이때,

$\frac{|z|}{|y|}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

이므로 세 수 $x$, $y$, $z$는 등비수열 $\{a_n\}$의 연속된 세 항의 값이다.

한편 $|r|=\frac{2}{3}$에서

$r=\frac{2}{3}$ 또는 $r=-\frac{2}{3}$

ⓐ $r=\frac{2}{3}$일 때,

$a_1$의 최솟값은 9이고

이때 $a_2=6$이므로

$a_1+a_2=9+6=15>10$

이다. 즉, 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

ⓑ $r=-\frac{2}{3}$일 때,

$xyz=216$이고

세 수 $x$, $y$, $z$는 등비수열 $\{a_n\}$의 연속된 세 항의 값이므로

$x<0$, $y>0$, $z<0$

이어야 한다.

즉, $x=-9$, $y=6$, $z=-4$

이때, $a_1>0$이므로 2보다 큰 자연수 $k$에 대하여 $a_k=9$

이면 $a_1+a_2>10$이다.

즉, 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

$a_2=-9$일 때,

$$a_1=a_2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-9\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{2}$$

이므로

$$a_1+a_2=\frac{27}{2}+(-9)=\frac{9}{2}<10$$

이다. 즉, 조건 (가)를 만족시킨다.

(ⅱ) $|x|>9$일 때,

$-1<r<1$이고 $a_1>0$이므로

(ⅰ)과 같은 방법으로 하면

$a_1+a_2\geq 10$이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1=\frac{27}{2}$, $r=-\frac{2}{3}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{27}{2}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{81}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=81$이므로

$p+q=10+81=91$

30. **출제의도** : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(1)=4\ln 2=\ln 16$에서

$e^{f(1)}=16$

또

$f(x)=\ln\left(\frac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$에서

$$e^{f(x)}=\frac{g(x)}{1+xf'(x)}$$

$g(x)=e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}$

이고

$$\int_1^2 g(x)\,dx$$

$$=\int_1^2 e^{f(x)}dx+\int_1^2 xf'(x)e^{f(x)}dx$$

$$=\int_1^2 e^{f(x)}dx+\left[xe^{f(x)}\right]_1^2-\int_1^2 e^{f(x)}dx$$

$=2e^{f(2)}-e^{f(1)}$

$=2e^{f(2)}-16$

$=34$

이므로

$e^{f(2)}=25$

따라서

$$\int_1^2 xg(x)\,dx$$

$$=\int_1^2 xe^{f(x)}dx+\int_1^2 x^2f'(x)e^{f(x)}dx$$

$$=\int_1^2 xe^{f(x)}dx+\left[x^2e^{f(x)}\right]_1^2-\int_1^2 2xe^{f(x)}dx$$

$$=4e^{f(2)}-e^{f(1)}-\int_1^2 xe^{f(x)}dx$$

$$=100-16-\int_1^2 xe^{f(x)}dx$$

$=53$

에서

$$\int_1^2 xe^{f(x)}dx=84-53=31$$

**정답** 31

■ [선택: 기하]
23. ② 24. ④ 25. ① 26. ① 27. ②
28. ④ 29. 396 30. 69

**23. 출제의도** : 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
포물선 $y^2=8x$, 즉 $y^2=4\times2\times x$의 초점의 좌표는 (2, 0)이다.
따라서 $p=2$

**정답** ②

**24. 출제의도** : 방향벡터를 이용하여 두 직선이 평행하도록 하는 상수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
두 직선

$$\frac{x-1}{2}=y-4,\ \frac{x+2}{8}=\frac{y+5}{a}$$

의 방향벡터를 각각

$\vec{u}=(2,1)$, $\vec{v}=(8,a)$

라 하자.
두 직선이 서로 평행하려면 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$가 서로 평행해야 하므로

$k\vec{u}=\vec{v}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 $k$가 존재해야 한다.
즉, $2k=8$, $k=a$이어야 하므로
$k=4$
따라서 $a=4$

**정답** ④

**25. 출제의도** : 좌표공간에서 점을 대칭이동한 점의 좌표와 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

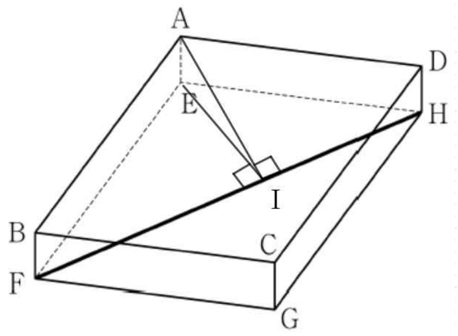
**정답풀이** :
점 A$(4,3,-9)$를 $xy$평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는
B$(4,3,9)$
또, 점 A$(4,3,-9)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는
C$(-4,-3,9)$
따라서 선분 BC의 길이는

$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-4-4)^2+(-3-3)^2+(9-9)^2}$$
$$=\sqrt{64+36}$$
$$=10$$

**정답** ①

**26. 출제의도** : 삼수선의 정리를 이용하여 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :
점 A에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 점 E이고, 점 E에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 두 선분 AI와 FH는 서로 수직이다.
그러므로 점 A와 직선 FH 사이의 거리는 선분 AI의 길이와 같다.




직각삼각형 EFH에서 $\overline{EF}=10$, $\overline{EH}=5$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{FH}^2=\overline{EF}^2+\overline{EH}^2$$
$$=10^2+5^2$$
$$=125$$

$\overline{FH}=5\sqrt{5}$

직각삼각형 EFH의 넓이를 구하는 식에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{EH}=\frac{1}{2}\times\overline{FH}\times\overline{EI}$$

$$\frac{1}{2}\times10\times5=\frac{1}{2}\times5\sqrt{5}\times\overline{EI}$$

$\overline{EI}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 AEI에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AI}^2=\overline{AE}^2+\overline{EI}^2$$
$$=1^2+(2\sqrt{5})^2$$
$$=21$$

$\overline{AI}=\sqrt{21}$

따라서 점 A와 직선 FH 사이의 거리는

$\overline{AI}=\sqrt{21}$

**정답 ①**

**27. 출제의도** : 쌍곡선의 정의를 이용하여 곡선 위의 점의 좌표를 구하고, 그 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

쌍곡선의 방정식이 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$이므로

$c^2=9+16=25$

즉, 두 초점의 좌표는

$F(0,5)$, $F'(0,-5)$

점 P가 제2사분면에 있으므로

$\overline{PF}<\overline{PF'}$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=8$ …… ㉠

삼각형 PF′F의 둘레의 길이가 30이고

$\overline{FF'}=10$이므로

$\overline{PF'}+\overline{PF}=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{PF}=6$, $\overline{PF'}=14$

점 P의 좌표를 $(a,b)$라 하면

$\overline{PF}^2=a^2+(b-5)^2=36$ …… ㉢

$\overline{PF'}^2=a^2+(b+5)^2=196$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $a<0$, $b>0$이므로

$a=-3\sqrt{3}$, $b=8$

즉, $P(-3\sqrt{3},8)$이므로 주어진 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{-3\sqrt{3}x}{9}-\frac{8y}{16}=-1$$

$$y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**정답 ②**

28. **출제의도** : 구의 방정식과 정사영의 성질의 이용하여 두 평면이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

구 $S: x^2+y^2+z^2=36$은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 6인 구이다.

두 점 A, B가 모두 구 $S$ 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=6$

두 점 A, B에서 $xy$평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자.

조건 (가)에서 점 C가 선분 OA 위의 점이므로 점 C에서 직선 AA′에 내린 수선의 발은 선분 AA′ 위에 있다.

이 수선의 발을 H라 하자.

이때 직선 BC와 $xy$평면이 서로 평행하므로 두 점 B, C의 $z$좌표가 서로 같고, 점 B에서 선분 AA′에 내린 수선의 발도 점 H이다.

두 직선 OA, AB와 $xy$평면이 이루는 예각의 크기가 각각 $\alpha$, $\beta$이고 두 평면 BHC, $xy$평면이 서로 평행하므로

$\angle\mathrm{ACH}=\alpha$, $\angle\mathrm{ABH}=\beta$

두 직각삼각형 ACH, ABH에서

$\sin\alpha=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$, $\sin\beta=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$

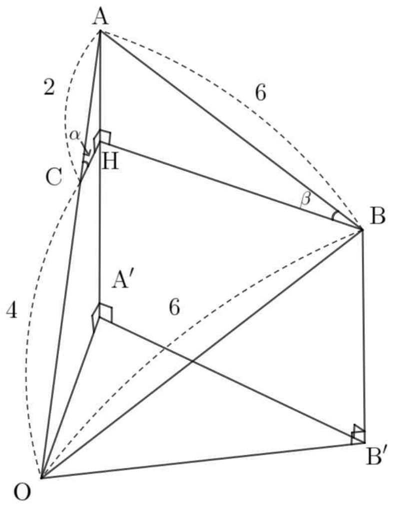
이고 조건 (나)에서 $\sin\alpha=3\sin\beta$이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=3\times\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$, 즉 $\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{AC}}$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OC}}=6-4=2$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{AC}}=3\times2=6$

그러므로 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다.




$\overline{\mathrm{AH}}=h$라 하면 두 직선 CH, OA′이 서로 평행하므로

$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{HA'}}=\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CO}}$

$h:\overline{\mathrm{HA'}}=2:4$

$\overline{\mathrm{HA'}}=2h$

직각삼각형 AOA′에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OA'}}^2+\overline{\mathrm{AA'}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2$

$\overline{\mathrm{OA'}}^2+(3h)^2=6^2$

$\overline{\mathrm{OA'}}=\sqrt{36-9h^2}$ …… ㉠

직각삼각형 OB′B에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OB'}}^2+\overline{\mathrm{B'B}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2$

$\overline{\mathrm{OB'}}^2+\overline{\mathrm{A'H}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2$

$\overline{\mathrm{OB'}}^2+(2h)^2=6^2$

$\overline{\mathrm{OB'}}=\sqrt{36-4h^2}$ …… ㉡

직각삼각형 AHB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$

$h^2+\overline{\mathrm{HB}}^2=6^2$

$\overline{\mathrm{HB}}=\sqrt{36-h^2}$

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{HB}}$이므로

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{36-h^2}$ …… ㉢

조건에서 삼각형 OAB의 $xy$평면 위로의 정사영인 삼각형 OA′B′이 직각삼각형이다.

이때 ㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{A'B'} > \overline{OB'} > \overline{OA'}$이므로 직각삼각형 OA′B′의 빗변의 길이는 $\overline{A'B'}$이고 밑변과 높이의 길이는 $\overline{OB'}$, $\overline{OA'}$이다.

직각삼각형 OA′B′에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{A'B'}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{OA'}^2$

$36 - h^2 = (36 - 4h^2) + (36 - 9h^2)$

$h^2 = 3$

$h = \sqrt{3}$

삼각형 OAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로 삼각형 OAB의 넓이를 $S$라 하면

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$$

삼각형 OA′B′은 밑변과 높이의 길이가

$\overline{OA'} = \sqrt{36 - 9h^2} = 3$,

$\overline{OB'} = \sqrt{36 - 4h^2} = 2\sqrt{6}$

인 직각삼각형이므로 삼각형 OA′B′의 넓이를 $S'$라 하면

$$S' = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

따라서 평면 OAB와 $xy$평면이 이루는 예각의 크기 $\theta$에 대하여

$S\cos\theta = S'$이므로

$$\cos\theta = \frac{S'}{S} = \frac{3\sqrt{6}}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

**정답** ④

**29. 출제의도** : 타원의 정의를 이용하여 타원의 장축의 길이를 구할 수 있는가?

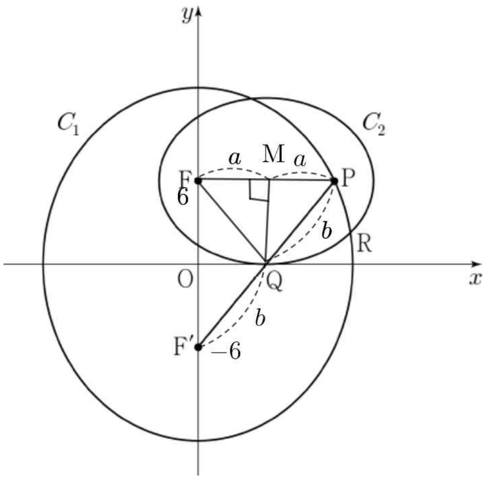
**정답풀이** :

두 초점이 P, F인 타원 $C_2$의 꼭짓점 중 하나가 점 Q이므로 $\overline{QP} = \overline{QF}$이고 점 Q에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{MP} = \overline{MF}$이다.

두 직선 FF′, MQ가 서로 평행하므로 두 삼각형 PMQ, PFF′은 닮음비가 $\overline{PM} : \overline{PF} = 1 : 2$인 닮은 삼각형이다.

이때 $\overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{FF'} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$이다.

$\overline{MP} = a$, $\overline{PQ} = b$라 하자.




직각삼각형 PMQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PQ}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2$

$b^2 = a^2 + 6^2$ …… ㉠

두 점 R, P가 두 초점이 F, F′인 타원 $C_1$ 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{FR} + \overline{F'R} = \overline{FP} + \overline{F'P}$

$\overline{FR} + \overline{F'R} = 2a + 2b$ …… ㉡

두 점 R, Q가 두 초점이 F, P인 타원 $C_2$ 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{FR} + \overline{PR} = \overline{FQ} + \overline{PQ}$

$\overline{FR} + \overline{PR} = 2b$ …… ㉢

㉡−㉢에서

$\overline{F'R} - \overline{PR} = 2a$

조건에서 $\overline{F'R}-\overline{PR}=7\sqrt{2}$이므로

$2a=7\sqrt{2}$

$a=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

㉠에서

$b^2=\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2+6^2=\dfrac{49}{2}+36=\dfrac{121}{2}$

$b=\dfrac{11}{\sqrt{2}}=\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$

㉡에서 타원 $C_1$의 장축의 길이는

$2a+2b=7\sqrt{2}+11\sqrt{2}=18\sqrt{2}$

㉢에서 타원 $C_2$의 장축의 길이는

$2b=11\sqrt{2}$

따라서 두 타원 $C_1$, $C_2$의 장축의 길이의 곱은

$18\sqrt{2}\times11\sqrt{2}=396$

**정답** 396

30. **출제의도** : 벡터의 내적과 벡터 사이의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

조건 (가)에서

$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PQ})\cdot\overrightarrow{BC}=0$

이므로 선분 BQ의 중점을 D라 하면

$2\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

즉, $\overrightarrow{PD}\perp\overrightarrow{BC}$이므로 삼각형 PBQ는

$\overline{PB}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이고

$\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{AC}$

또, $(\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{RQ})\cdot\overrightarrow{BC}=0$

이므로 선분 QC의 중점을 E라 하면

$2\overrightarrow{RE}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

즉, $\overrightarrow{RE}\perp\overrightarrow{BC}$이므로 삼각형 RQC는

$\overline{RQ}=\overline{RC}$인 이등변삼각형이고

$\overline{RQ}\,/\!/\,\overline{AB}$

조건 (나)에서

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=|\overrightarrow{QP}|^2$

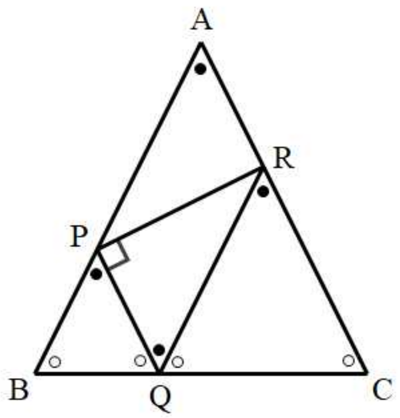
이므로 $\angle PQR=\theta$라 하면

$|\overrightarrow{QR}|\cos\theta=|\overrightarrow{QP}|$

에서

$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{QP}|}{|\overrightarrow{QR}|}$

이를 만족시키려면 $\angle RPQ=\dfrac{\pi}{2}$이어야 하므로 주어진 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.




한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{(8\sqrt{5})^2+(8\sqrt{5})^2-16^2}{2\times8\sqrt{5}\times8\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$

이고, $\angle PQR=\angle A$이므로

$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}}=\dfrac{3}{5}$

이때 두 삼각형 PBQ, RQC는 서로 닮음

이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{QC}}}=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{RC}}}=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{RQ}}}=\frac{3}{5}$$

이고, $\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QC}}=16$이므로

$\overline{\mathrm{BQ}}=6$, $\overline{\mathrm{QC}}=10$

그러므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{RQ}}=5\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{PR}}=4\sqrt{5}$

한편, 선분 PR을 $1:3$으로 내분하는 점을 S라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{XS}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{XR}}+3\overrightarrow{\mathrm{XP}}}{1+3}$$

이므로

$3\overrightarrow{\mathrm{XP}}+\overrightarrow{\mathrm{XR}}=4\overrightarrow{\mathrm{XS}}$

이다. 즉,

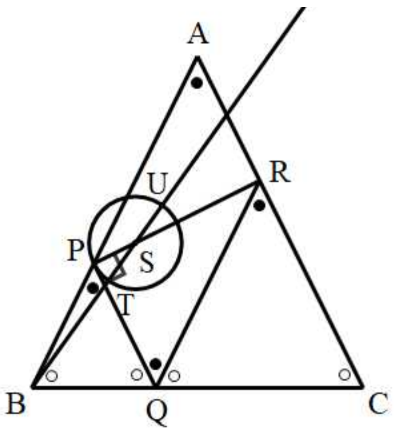
$|3\overrightarrow{\mathrm{XP}}+\overrightarrow{\mathrm{XR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$

을 만족시키는 점 X는

$$|\overrightarrow{\mathrm{XS}}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$$

을 만족시킨다.

그러므로 점 X는 다음 그림과 같이 선분 PR을 $1:3$으로 내분하는 점 S를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원 위를 움직인다.




위 그림과 같이 직선 BS가 원과 만나는 점 중 B와 가까운 점을 T, 먼 점을 U라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{BT}}|\le|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|\le|\overrightarrow{\mathrm{BU}}|$

이므로

$M=|\overrightarrow{\mathrm{BU}}|$, $m=|\overrightarrow{\mathrm{BT}}|$

이다.

한편, 삼각형 PBS에서

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{5}$,

$$\overline{\mathrm{PS}}=\frac{1}{4}\overline{\mathrm{PR}}=\frac{1}{4}\times4\sqrt{5}=\sqrt{5},$$

$$\angle\mathrm{SPB}=\frac{\pi}{2}+\angle\mathrm{BPQ}=\frac{\pi}{2}+\angle\mathrm{A}$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BS}}^2&=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PS}}^2-2\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{PS}}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\angle\mathrm{A}\right)\\&=45+5+30\times\sin(\angle\mathrm{A})\\&=50+30\times\frac{4}{5}\\&=74\end{aligned}$$

따라서

$M=\sqrt{74}+\sqrt{5}$, $m=\sqrt{74}-\sqrt{5}$

이므로

$$\begin{aligned}M\times m&=(\sqrt{74}+\sqrt{5})(\sqrt{74}-\sqrt{5})\\&=74-5=69\end{aligned}$$

**정답** 69