2026학년도 대학수학능력시험
수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ①	02. ④	03. ⑤	04. ③	05. ③
06. ②	07. ⑤	08. ①	09. ④	10. ③
11. ③	12. ②	13. ⑤	14. ④	15. ④
16. 9	17. 16	18. 12	19. 15	
20. 130	21. 65	22. 457		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$9^{\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3^{2\times\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=3^0$$
$$=1$$

정답 ①

2. 출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=3x^3+4x+1$에서

$f'(x)=9x^2+4$

이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$
$$=9+4=13$$

정답 ④

3. 출제의도 : 시그마의 정의와 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{4}(2a_k-k)=2\sum_{k=1}^{4}a_k-\sum_{k=1}^{4}k$$
$$=2\sum_{k=1}^{4}a_k-\frac{4\times 5}{2}$$
$$=2\sum_{k=1}^{4}a_k-10$$
$$=0$$

에서 $2\sum_{k=1}^{4}a_k=10$

따라서 $\sum_{k=1}^{4}a_k=5$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이어야 한다.

즉,

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(3x-2)$$
$$=3\times 1-2=1$$

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-3x+a)$$
$$=1^2-3\times 1+a=-2+a$$

$f(1)=1^2-3\times 1+a=-2+a$

이므로

$1=-2+a$

따라서

$a=3$

정답 ③

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x+2)(2x^2-x-2)$에서

$f'(x)=1\times(2x^2-x-2)+(x+2)\times(4x-1)$

따라서

$$
\begin{aligned}
f'(1)&=(2-1-2)+(1+2)\times(4-1)\\
&=-1+9\\
&=8
\end{aligned}
$$

정답 ③

6. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

로그의 정의에 의하여

$\log_a b=3$에서

$b=a^3$

이때

$$\log_3\frac{b}{a}=\log_3\frac{a^3}{a}=\log_3 a^2=2\log_3 a=\frac{1}{2}$$

에서

$$\log_3 a=\frac{1}{4}$$

이므로

$$\log_3 b=3\log_3 a=\frac{3}{4}$$

따라서 로그의 성질에 의해

$$
\begin{aligned}
\log_9 ab&=\log_{3^2}(a\times a^3)\\
&=\frac{4}{2}\log_3 a\\
&=2\times\frac{1}{4}\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

정답 ②

7. **출제의도** : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선 $y=x^2+3$, $y=-\frac{1}{5}x^2+3$은 점 $(0,3)$에서 접하고 모든 실수 x에 대하여

$$x^2+3\ge-\frac{1}{5}x^2+3$$

이므로 구하는 넓이는

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2\left\{(x^2+3)-\left(-\frac{1}{5}x^2+3\right)\right\}dx\\
&=\int_0^2\frac{6}{5}x^2dx\\
&=\left[\frac{2}{5}x^3\right]_0^2\\
&=\frac{16}{5}
\end{aligned}
$$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 사인함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta>0$

이므로

$\cos\theta<0$

이때,

$\sin\theta+3\cos\theta=0$

에서

$\sin\theta=-3\cos\theta>0$

이고,

$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=9\cos^2\theta\\&=9(1-\sin^2\theta)\\&=9-9\sin^2\theta\end{aligned}$$

$10\sin^2\theta=9$

$\sin^2\theta=\frac{9}{10}$

$\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

정답 ①

9. **출제의도** : 삼차함수의 그래프와 극값을 이용하여 x축에 평행한 직선과 삼차함수의 그래프가 접할 때의 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2+6ax-9a^2\\&=3(x+3a)(x-a)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$x=-3a$ 또는 $x=a$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

한편, $f(0)=4<5$이고,

직선 $y=5$가 곡선 $y=f(x)$에 접하므로

$f(-3a)=5$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}f(-3a)&=(-3a)^3+3a(-3a)^2-9a^2(-3a)+4\\&=27a^3+4\end{aligned}$$

이므로

$27a^3+4=5$에서

$a^3=\frac{1}{27}$

a가 양수이므로

$a=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+4$

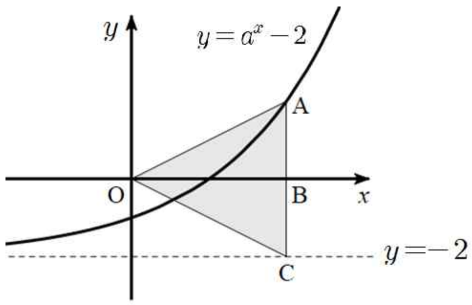
이므로

$$\begin{aligned}f(2)&=2^3+2^2-2+4\\&=14\end{aligned}$$

정답 ④

10. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$a>1$이므로 함수 $y=a^x-2$의 그래프는 위 그림과 같고 이 곡선의 점근선은 직선 $y=-2$이다.

점 A의 좌표를 (p, q)라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$

이므로

$q=2$

점 A는 곡선 $y=a^x-2$ 위의 점이므로

$2=a^p-2$

즉, $a^p=4$에서 $p=\log_a 4$

이때 삼각형 AOC의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{OB}}=8$

에서

$\overline{\mathrm{OB}}=4$

즉, $\log_a 4=4$이므로

$a^4=4$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

따라서

$$\begin{aligned} a\times\overline{\mathrm{OB}}&=\sqrt{2}\times4\\ &=2^{\frac{1}{2}+2}\\ &=2^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

정답 ③

11. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 위치와 운동 방향, 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $k=0$이면 $v(t)=t^2+4$이므로

$t=1$일 때 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} &0+\int_0^1(t^2+4)dt\\ &=\left[\frac{1}{3}t^3+4t\right]_0^1\\ &=\frac{1}{3}+4-0\\ &=\frac{13}{3}\ (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄴ. $k=3$이면 $v(t)=t^2-3t+4$이므로

$v(t)=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

따라서 출발한 후 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다. (거짓)

ㄷ. $k=5$이면 $v(t)=t^2-5t+4$이므로

$v(t)=(t-1)(t-4)$

$0<t<1$일 때, $v(t)>0$이고

$1<t<2$일 때, $v(t)<0$이므로

시각 $t=0$에서 시각 $t=2$까지

점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$\begin{aligned} s&=\int_0^2|v(t)|dt\\ &=\int_0^2\left|t^2-5t+4\right|dt\\ &=\int_0^1(t^2-5t+4)dt\\ &\quad+\int_1^2\{-(t^2-5t+4)\}dt\\ &=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^1\\ &\quad-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_1^2\\ &=\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\\ &\quad-\left\{\left(\frac{8}{3}-10+8\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\right)\right\}\\ &=3\ (\text{참}) \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

12. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$2(a_1+a_4+a_7)=6$에서

$2(a_1+a_1r^3+a_1r^6)=2a_1(1+r^3+r^6)=6$

$a_1(1+r^3+r^6)=3$ ...... ㉠

$a_4+a_7+a_{10}=6$에서

$a_1r^3+a_1r^6+a_1r^9$

$=a_1r^3(1+r^3+r^6)=6$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=2$

㉠에 $r^3=2$를 대입하면

$a_1(1+2+2^2)=3$

$a_1=\dfrac{3}{7}$

따라서

$a_{10}=a_1r^9=\dfrac{3}{7}\times 2^3=\dfrac{24}{7}$

정답 ②

13. **출제의도** : 곱의 미분법과 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=2x-4$에서 $f'(1)=-2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,-6)$에서의 접선 l의 방정식은

$y=-2(x-1)-6$

즉, $y=-2x-4$

$g(x)=(x^3-2x)f(x)$에서 곱의 미분법에 의하여

$g'(x)=(3x^2-2)f(x)+(x^3-2x)f'(x)$

이므로

$g'(1)=(3-2)f(1)+(1-2)f'(1)$

$=1\times(-6)+(-1)\times(-2)=-4$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,6)$에서의 접선 m의 방정식은

$y=-4(x-1)+6$

즉, $y=-4x+10$

이때 두 직선 $y=-2x-4$, $y=-4x+10$의 교점의 x좌표는

$-2x-4=-4x+10$에서 $x=7$이므로 두 직선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\{10-(-4)\}\times 7=49$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle\mathrm{HCG}=\angle\mathrm{BAC}=\theta_1$이라 하자.

직각삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\sqrt{(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BC}})^2}$

$=\sqrt{3^2+4^2}=5$

이므로

$\sin\theta_1=\dfrac{4}{5}$

또한

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AG}}=2$

이므로 $\angle\mathrm{CAG}=\theta_2$라 하면 삼각형 ACG에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta_2=\dfrac{(\overline{\mathrm{AG}})^2+(\overline{\mathrm{AC}})^2-(\overline{\mathrm{CG}})^2}{2\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{AC}}}$

$=\dfrac{2^2+5^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times 2\times 5}=\dfrac{1}{4}$

따라서 삼각형 AEG에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{GE}}^2=(\overline{\mathrm{AG}})^2+(\overline{\mathrm{AE}})^2-2\times\overline{\mathrm{AG}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\cos\theta_2$

$$=2^2+2^2-2\times2\times2\times\frac{1}{4}=6$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{GE}}=\sqrt{6}$

삼각형 CGE에서 $\angle\mathrm{ECG}=\theta_3$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta_3=\frac{(\overline{\mathrm{CG}})^2+(\overline{\mathrm{CE}})^2-(\overline{\mathrm{GE}})^2}{2\times\overline{\mathrm{CG}}\times\overline{\mathrm{CE}}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{6})^2+3^2-(\sqrt{6})^2}{2\times2\sqrt{6}\times3}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

따라서

$$\sin\theta_3=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{8}$$

삼각형 CGE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{\mathrm{GE}}}{\sin\theta_3}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{10}}{8}}=\frac{8\sqrt{15}}{5}$$

따라서 삼각형 CHG에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{GH}}=2R\times\sin\theta_1$$

$$=\frac{8\sqrt{15}}{5}\times\frac{4}{5}$$

$$=\frac{32\sqrt{15}}{25}$$

정답 ④

15. 출제의도 : 정적분으로 정의된 함수의 도함수와 함수의 극대, 극소를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x)=\int_0^x(g(t)-f(t))dt$에서

$h'(x)=g(x)-f(x)$

이므로 함수 $h(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

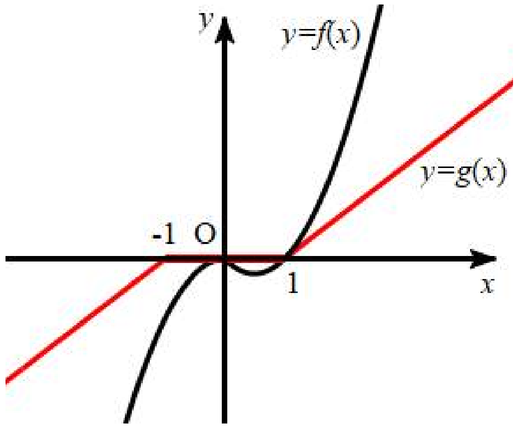
$h'(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$

이면서 $h'(x)=0$인 점의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌는 점이 오직 한 개만 있어야 한다.

이때 $f'(1)=1$이므로 $a\leq1$이면 다음 그림과 같이 $x=0$ 또는 $x=1$에서만

$f(x)=g(x)$

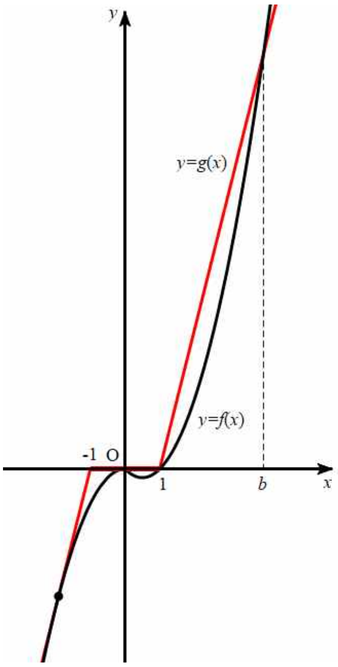
이다.



이때 $x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq f(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $0<x<1$에서 $g(x)>f(x)$, $x>1$에서 $f(x)>g(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서만 극값을 갖는다.

즉, $a\leq1$이면 조건을 만족시킨다.

한편 $a>1$이면 다음 그림과 같이 $x>1$에서 $f(x)=g(x)$인 x의 값이 있다. 이 값을 b라 하자.



이때 $f(b)=g(b)=0$이고 $1<x<b$에서 $g(x)>f(x)$, $x>b$에서 $f(x)>g(x)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖는다.

그러므로 조건을 만족시키려면 $x<-1$에서 $f(x)>g(x)$인 구간이 없어야 하므로 a의 값은 위 그림과 같이 $x<-1$에서 곡선 $y=-x^2$과 직선 $y=ax+a$가 접할 때 최대가 된다.

이 접점의 좌표를 $(t, -t^2)$이라 하면 접선의 기울기가 $-2t$이므로 접선의 방정식은

$y+t^2=-2t(x-t)$

이다. 이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나야 하므로

$t^2=-2t(-1-t)$

$t(t+2)=0$

$t<-1$이므로 $t=-2$

즉, 조건을 만족시키는 a의 최댓값은

$-2t=4$

이므로

$k=4$

이때, $x\geq 1$에서 $g(x)=4x-4$이므로

$$h(3)=\int_0^3 (g(t)-f(t))dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^3\{(4t-4)-(t^2-t)\}dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^3(-t^2+5t-4)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$
$$+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{10}{3}=\frac{7}{2}$$

따라서 $k+h(3)=4+\frac{7}{2}=\frac{15}{2}$

정답 ④

16. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=n^2a_n+1$ …… ㉠

을 만족시키므로

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2=1^2\times a_1+1$

$=1\times 1+1$

$=2$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_3=2^2\times a_2+1$

$=4\times 2+1$

$=9$

정답 9

17. 출제의도 : 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$F(x)$가 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int (4x^3-2x)dx$$
$$=x^4-x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$F(0)=4$이므로 $C=4$

따라서 $F(x)=x^4-x^2+4$이므로

$F(2)=16-4+4=16$

정답 16

18. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\angle\mathrm{BAC})=-\dfrac{3}{5}$

이고, $\sin(\angle\mathrm{BAC})>0$ 이므로

$$\sin(\angle\mathrm{BAC})=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{BAC})}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin(\angle\mathrm{BAC})$$
$$=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{4}{5}=12$$

정답 12

19. 출제의도 : 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-8$이라 하면

$$f'(x)=6x^2+6x-12$$
$$=6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=12$를 갖고, $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-15$를 갖는다.

이때 $f(2)=-4$이므로 $-2\le x\le 2$에서

$-15\le f(x)\le 12$

따라서 양수 k의 최솟값은 15이다.

정답 15

20. 출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계 및 $\sum$의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

2이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로

$$a_{n+1}$$
$$=\left\{\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{6}(n+1)^2-\frac{1}{6}(n+1)+10\right\}$$
$$-\left(\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\right)$$

$$=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\boxed{\frac{1}{3}n}$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n+a_{n+1}=3\times\boxed{\frac{1}{3}n}$$

즉, $2a_n+a_{n+1}=n$ …… ㉠

이다.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\ (n\geq 2)$$

에서 양변에 $n=2$를 대입하면

$$a_1+a_2=\frac{2}{3}a_2+\frac{1}{6}\times 2^2-\frac{1}{6}\times 2+10$$

즉, $a_1+\frac{1}{3}a_2=\frac{31}{3}$

$a_1=7$이므로

$a_2=3\times\left(\frac{31}{3}-7\right)=\boxed{10}$ …… ㉡

이다. ㉠과 ㉡에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}$$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})$$
$$+(a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})$$
$$=a_1+a_2+2(a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})$$
$$+(a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12})$$
$$=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})$$
$$=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2k+1)$$
$$=7+10+(3+5+7+9+11)$$
$$=17+7\times 5=\boxed{52}$$

이다.

이때 $f(n)=\frac{1}{3}n$, $p=10$, $q=52$이므로

$$\frac{p\times q}{f(12)}=\frac{10\times 52}{4}=130$$

정답 130

21. 출제의도 : 극한의 성질과 미분계수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$$\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t+}g(x)=g(t)$$

즉,

$$\lim_{x\to t-}(-f(x))=\lim_{x\to t+}f(x)=f(t)$$

…… ㉠

이어야 한다.

그런데

$$\lim_{x\to t-}(-f(x))=-f(t),\ \lim_{x\to t+}f(x)=f(t)$$

이므로 ㉠에서

$f(t)=-f(t)$, 즉 $f(t)=0$

조건 (가)에서 $a=0$ 또는 $a=2$일 때에도

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재해야 하므로

$g(0)=g(2)=0$, 즉

$f(0)=f(2)=0$

그러므로

$f(x)=\alpha x(x-2)(x-k)$ (k는 상수)

…… ㉡

로 놓을 수 있다.

한편, 자연수 m에 대하여 조건 (나)에서

$\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}<0$일 조건은 다음과 같다.

(i) $m=1$일 때

$\lim_{x\to 1+}x(x-2)=1\times(1-2)<0$이므로

$g(1)>0$이어야 한다.

이때 $-\frac{7}{2}g(1)<0$이므로 조건 (나)에

서 $-\frac{7}{2}g(1)$이 자연수라는 조건에 모순이다.

그러므로 1은 조건 (나)를 만족시키는 자연수 m이 될 수 없다.

(ⅱ) $m=2$일 때

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}<0$$

이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}<0$$

이어야 한다.

(ⅲ) $m>2$일 때

$\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}=\frac{g(m)}{m(m-2)}$이고

$m(m-2)>0$이므로

$g(m)<0$

이어야 한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}<0$인 자연수 m의 개수가 2이려면

$g(m)<0$이고 $m>2$

인 자연수 m이 적어도 한 개 존재해야 한다.

그러므로 ㉡에서

$f(x)=\alpha x(x-2)(x-k)$ $(k>3)$

이고, 조건 (나)에서

$g(-1)>0$, $g(1)<0$

이므로

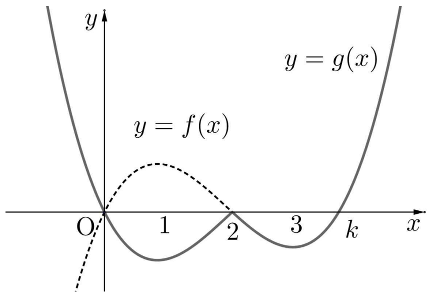
$t=2$

이어야 한다.

그러므로

$$g(x)=\begin{cases}-\alpha x(x-2)(x-k) & (x<2)\\ \alpha x(x-2)(x-k) & (x\ge 2)\end{cases}$$

이다.



이때 2와 3이 조건 (나)를 만족시키므로

$3<k\le 4$이어야 한다.

한편,

$g(-1)=3\alpha(k+1)$, $g(1)=-\alpha(k-1)$

이고, 조건 (나)에서

$g(-1)=2$, $-\frac{7}{2}g(1)=3$

또는

$g(-1)=3$, $-\frac{7}{2}g(1)=2$

이다.

① $g(-1)=2$, $-\frac{7}{2}g(1)=3$일 때

$3\alpha(k+1)=2$에서 $\alpha=\frac{2}{3(k+1)}$

$-\frac{7}{2}\times\{-\alpha(k-1)\}=3$에서

$\alpha=\frac{6}{7(k-1)}$

$\frac{2}{3(k+1)}=\frac{6}{7(k-1)}$에서

$7(k-1)=9(k+1)$

$7k-7=9k+9$

$k=-8$

이는 $3<k\le 4$에 모순이다.

② $g(-1)=3$, $-\frac{7}{2}g(1)=2$일 때

$3\alpha(k+1)=3$에서 $\alpha=\frac{1}{k+1}$

$-\frac{7}{2}\times\{-\alpha(k-1)\}=2$에서

$\alpha=\frac{4}{7(k-1)}$

$\frac{1}{k+1}=\frac{4}{7(k-1)}$에서

$7(k-1)=4(k+1)$

$7k-7=4k+4$

$k=\frac{11}{3}$

이는 $3<k\leq 4$를 만족시킨다.

$k=\frac{11}{3}$일 때

$\alpha=\frac{1}{k+1}=\frac{3}{14}$

그러므로

$g(-5)=-\frac{3}{14}\times(-5)\times(-7)\times\left(-\frac{26}{3}\right)$

$=65$

정답 65

22. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 위치 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\log_{16}(8x+2)$에서

$16^y=8x+2$ ······ ㉠

$y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$에서

$4^x=4y+2$ ······ ㉡

이므로 ㉠에서 y대신에 $\frac{x}{2}$, x대신에 $\frac{y}{2}$를 대입하면 ㉡과 일치한다. ······ (i)

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$위의 점이므로

$16^b=8a+2$

또한 $\mathrm{B}(c,\ d)$라 하면 점 B는 곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$위의 점이므로

$4^c=4d+2$

그리고 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 (b,a)가 직선 OB위에 있어야 하므로

$a=\frac{d}{c}\times b,\ ac-bd=0$ ······ ㉢

이때 (i)에 의하여

$a=\frac{d}{2},\ b=\frac{c}{2}$ 즉 $d=2a.\ c=2b$ ······ ㉣

이고 이 관계는 ㉢을 만족시킨다.

따라서 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8},\frac{133}{8}\right)$이므로

$\frac{a+c}{2}=\frac{77}{8},\ \frac{b+d}{2}=\frac{133}{8}$

$a+c=\frac{77}{4},\ b+d=\frac{133}{4}$

$a+2b=\frac{77}{4}.\ 2a+b=\frac{133}{4}$

따라서 $a=\frac{63}{4},\ b=\frac{7}{4}$이므로

$a\times b=\frac{441}{16}$

즉 $p=16,\ q=441$이므로

$p+q=457$

정답 457

■ [선택: 확률과 통계]
23. ③ 24. ① 25. ② 26. ⑤ 27. ④
28. ② 29. 977 30. 262

23. **출제의도** : 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

정답 ③

24. **출제의도** : 확률의 덧셈정리와 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{5}$$

$\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{1}{4}$에서

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{4}\times\mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}\times\frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

$\mathrm{P}(A\cup B) = 1$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B) = 1$

즉, $\dfrac{2}{5}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{1}{10} = 1$이므로

$$\mathrm{P}(B) = 1-\frac{2}{5}+\frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

정답 ①

25. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
10개의 공 중 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_2 = \frac{10\times9}{2} = 45$$

이므로 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색일 확률은

$$\frac{2\times{}_5\mathrm{C}_2}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 서로 같을 확률은

$$\frac{4}{45}$$

꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 사건과 공에 적힌 수가 서로 같은 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{4}{9}+\frac{4}{45} = \frac{8}{15}$$

정답 ②

26. **출제의도** : 모집단의 표준편차와 표본의 크기를 이용하여 모평균의 신뢰구간을 표본평균으로 나타낼 수 있는가?

정답풀이 :

모집단의 표준편차가 5이므로

모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{x}$라 하면

모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}$

이다.

즉,

$\overline{x}-2.15\le m\le\overline{x}+2.15$

한편, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이

$1.2\le m\le a$

이므로

$\overline{x}-2.15=1.2$ …… ㉠

$\overline{x}+2.15=a$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$2.15-(-2.15)=a-1.2$

$4.3=a-1.2$

따라서

$a=4.3+1.2$

$=5.5$

정답 ⑤

27. 출제의도 : 확률분포의 성질을 이용하여 이산확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 가지는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+a=1$에서

$a=\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(X)$

$=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{3}{12}+3\times\frac{5}{12}+4\times\frac{1}{6}$

$=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$,

$\mathrm{E}(X^2)$

$=0^2\times\frac{1}{12}+1^2\times\frac{1}{12}+2^2\times\frac{3}{12}+3^2\times\frac{5}{12}+4^2\times\frac{1}{6}$

$=\frac{90}{12}=\frac{15}{2}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2$

$=\frac{15}{2}-\frac{25}{4}=\frac{5}{4}$

따라서

$\mathrm{V}\left(\frac{1}{a}X\right)=\mathrm{V}(6X)=36\mathrm{V}(X)$

$=36\times\frac{5}{4}=45$

정답 ④

28. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 시행은 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 홀수이면 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고,

나온 눈의 수가 2이면 1, 2가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고,

나온 눈의 수가 4이면 1, 2, 4가 적힌

상자에 공을 각각 1개씩 넣고,
나온 눈의 수가 6이면 1, 2, 3, 6이 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는 시행이다.
이 시행을 4번 반복한 후 여섯 개의 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수인 사건을 A, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 1개 더 많은 사건을 B라 하면 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)$
이다.
사건 A는 다음의 네 가지 경우이다.
(ⅰ) 4번의 시행에서 나온 눈의 수가 홀수인 경우가 3번일 때
나온 눈의 수가 2 또는 6인 경우가 1번이어야 하므로 이 경우의 확률은
$$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^1=\frac{216}{6^4}$$
(ⅱ) 4번의 시행에서 나온 눈의 수가 홀수인 경우가 2번일 때
나온 눈의 수가 4인 경우가 1번, 2 또는 6인 경우가 1번이어야 하므로 이 경우의 확률은
$$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^1=\frac{216}{6^4}$$
(ⅲ) 4번의 시행에서 나온 눈의 수가 홀수인 경우가 1번일 때
나온 눈의 수가 4인 경우가 2번, 2 또는 6인 경우가 1번이거나
나온 눈의 수가 2 또는 6인 경우가 3번이어야 하므로 이 경우의 확률은
$$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^1+\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^3$$
$$=\frac{168}{6^4}$$
(ⅳ) 4번의 시행에서 나온 눈의 수가 모두 짝수일 때
나온 눈의 수가 4인 경우가 1번, 2 또는 6인 경우가 3번이거나
나온 눈의 수가 4인 경우가 3번, 2 또는 6인 경우가 1번이어야 하므로
이 경우의 확률은
$$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{2}{6}\right)^3+\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^1=\frac{40}{6^4}$$
(ⅰ) ~ (ⅳ)에서
$$\mathrm{P}(A)=\frac{216}{6^4}+\frac{216}{6^4}+\frac{168}{6^4}+\frac{40}{6^4}$$
$$=\frac{640}{6^4}$$
한편, 사건 $A\cap B$는 4번의 시행에서 나온 눈의 수가 홀수인 경우가 2번, 4인 경우가 1번, 6인 경우가 1번이거나 나온 눈의 수가 홀수인 경우가 1번, 6인 경우가 3번이어야 하므로 이 경우의 확률은
$$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1+\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^3$$
$$=\frac{120}{6^4}$$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{120}{6^4}}{\frac{640}{6^4}}$$
$$=\frac{3}{16}$$
정답 ②

29. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 이항분포를 구한 후 이항분포와 정규분포와의 관계를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 a보다 작거나 같을 확률은 $\frac{a}{6}$이고, a보다 클 확률은 $\frac{6-a}{6}$이므로 주어진 시행을 한 번 하여 기록한 수가 3일 확률은

$$\frac{a}{6}\times{}_5C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{6-a}{6}\times{}_3C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$=\frac{a+4}{32}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(19200,\ \frac{a+4}{32}\right)$를 따른다.

$E(X)=19200\times\frac{a+4}{32}=4800$에서

$a=4$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(19200,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때,

$V(X)=19200\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=3600$

이고, 19200은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(4800,\ 60^2)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}k&=P(X\le 4800+30a)\\&=P(X\le 4920)\\&=P\left(Z\le\frac{4920-4800}{60}\right)\\&=P(Z\le 2)\\&=0.5+P(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.477\\&=0.977\end{aligned}$$

따라서

$1000\times k=1000\times0.977=977$

정답 977

30. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)에 의해
들어 있는 공의 개수가 1인 주머니는 4개 또는 6개이다.

(ⅰ) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니가 4개일 때
공이 모두 8개이고, 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하이므로 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니는 2이고, 들어 있는 공의 개수가 0인 주머니는 4개이다.
조건 (나)에서 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않아야 하므로 먼저 들어 있는 공의 개수가 0인 주머니 4개를 각각 A_1, A_2, A_3, A_4라 하고, 네 주머니 A_1, A_2, A_3, A_4가 다음과 같이 놓여 있다고 하자.

$^{\vee}\ A_1\ ^{\vee}\ A_2\ ^{\vee}\ A_3\ ^{\vee}\ A_4\ ^{\vee}$

네 주머니 A_1, A_2, A_3, A_4의 사이사이와 맨 앞, 맨 뒤 중 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니 2개를 놓을 위치를 택하는 경우의 수는

$_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

들어 있는 공의 개수가 2인 주머니 2개를 B_1, B_2라 하고, 주머니 B_1, B_2가 다음과 같이 놓여 있다고 하자.

$B_1\ A_1\ ^{\vee}\ A_2\ ^{\vee}\ A_3\ \ B_2\ \ A_4\ ^{\vee}$

…… ㉠

들어 있는 공의 개수가 1인 주머니 4개를 나열하는 경우의 수는 ㉠의 $^{\vee}$ 표시된 3곳 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}$

$=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

그러므로 이때의 경우의 수는

$10\times15=150$

(ⅱ) 들어 있는 공의 개수가 1인 주머니가 6개일 때

공이 모두 8개이고, 각 주머니에 들어 있는 공의 개수가 2 이하이므로 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니는 1개이고, 들어 있는 공의 개수가 0인 주머니는 3개이다.

조건 (나)에서 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니와 이웃한 주머니에는 공이 들어 있지 않아야 하므로 먼저 들어 있는 공의 개수가 0인 주머니 3개를 A_1, A_2, A_3이라 하고, 세 주머니 A_1, A_2, A_3이 다음과 같이 놓여 있다고 하자.

$^{\vee}\ A_1\ ^{\vee}\ A_2\ ^{\vee}\ A_3\ ^{\vee}$

세 주머니 A_1, A_2, A_3의 사이 사이와 맨 앞, 맨 뒤 중 들어 있는 공의 개수가 2인 주머니 1개를 놓을 위치를 택하는 경우의 수는

$_{4}C_{1}=4$

들어 있는 공의 개수가 2인 주머니 1개를 B_1이라 하고, 주머니 B_1이 다음과 같이 놓여 있다고 하자.

$B_1\ A_1\ ^{\vee}\ A_2\ ^{\vee}\ A_3\ ^{\vee}$

…… ㉡

들어 있는 공의 개수가 1인 주머니 6개를 나열하는 경우의 수는 ㉡의 $^{\vee}$ 표시된 3곳 중에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{6}={}_{3+6-1}C_{6}={}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}$

$=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

그러므로 이때의 경우의 수는

$4\times28=112$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$150+112=262$

정답 262