• 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정 답

1	②	2	⑤	3	④	4	③	5	②
6	①	7	①	8	③	9	④	10	⑤
11	④	12	②	13	①	14	②	15	⑤
16	⑤	17	③	18	①	19	③	20	④
21	③	22	15	23	4	24	26	25	3
26	153	27	150	28	11	29	45	30	24

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

$$\begin{aligned}A+B&=(2x^2+3x-1)+(-x^2-2x+3)\\&=\{2x^2+(-x^2)\}+\{3x+(-2x)\}+(-1+3)\\&=x^2+x+2\end{aligned}$$

2. [출제의도] 복소수의 곱셈을 계산한다.

$$\begin{aligned}(2+i)(2-i)&=4-2i+2i-i^2\\&=4-(-1)=5\end{aligned}$$

3. [출제의도] 순열의 수를 계산한다.

${}_6\mathrm{P}_2=6\times5=30$

4. [출제의도] 역함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$f(3)=5$이므로 $f^{-1}(5)=3$

5. [출제의도] 두 직선의 수직 조건을 이해하여 직선의 y절편을 구한다.

직선 $y=\frac{1}{3}x-1$의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로

직선 $y=\frac{1}{3}x-1$에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면 $\frac{1}{3}\times m=-1$, $m=-3$

그러므로 점 $(3,1)$을 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은 $y=-3(x-3)+1=-3x+10$

따라서 구하는 직선의 y절편은 10

6. [출제의도] 행렬을 이해하여 모든 성분의 합을 구한다.

$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=1+2=3$, $a_{21}=2+1=3$,

$a_{22}=2+2=4$이므로 $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+3+3+4=12$

7. [출제의도] 삼차방정식을 이해하여 방정식의 모든 양의 실근의 합을 구한다.

$P(x)=x^3-7x+6$이라 하자.

$P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}1&1&0&-7&6\\&&1&1&-6\\\hline&1&1&-6&\boxed{0}\end{array}$$

이므로

$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3)$

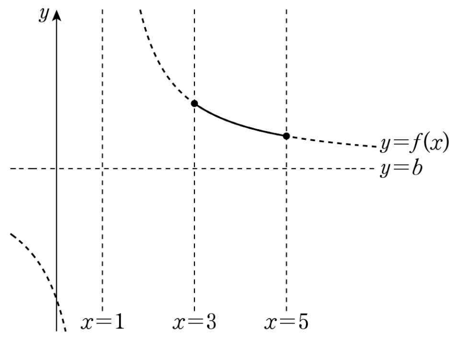
따라서 삼차방정식

$P(x)=x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)=0$

의 모든 양의 실근은 1, 2이므로 그 합은 3

8. [출제의도] 유리함수의 그래프를 이해하여 상수의 값을 구한다.

유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=1$, $y=b$이고 $a>0$이므로 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 $3\le x\le5$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최대이고, $x=5$일 때 최소이므로

$f(3)=\frac{a}{2}+b=5$, $f(5)=\frac{a}{4}+b=4$

에서 $a=4$, $b=3$이므로 $a+b=7$

9. [출제의도] 나머지정리를 이해하여 식의 값을 구한다.

다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 3이고, $x-2$로 나눈 나머지는 -3이므로

$P(-1)=3$, $P(2)=-3$

$P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지 $R(x)$는 일차 이하의 다항식이므로 $R(x)=ax+b$인 두 상수 a, b가 존재한다.

$P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$P(-1)=-a+b=3$, $P(2)=2a+b=-3$

에서 $a=-2$, $b=1$이므로 $R(x)=-2x+1$

따라서 $R(3)=-6+1=-5$

10. [출제의도] 행렬의 곱셈을 이해하여 미지수를 구한다.

$AB=\begin{pmatrix}1&3\\k&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k&1\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k-6&13\\k^2-10&k+20\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}k-6&13\\k^2-10&k+20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&13\\-1&b\end{pmatrix}$

$k^2-10=-1$이므로 $k^2=9$, $k>0$이므로 $k=3$

$a=k-6=-3$, $b=k+20=23$

따라서 $a+b=-3+23=20$

11. [출제의도] 조건과 진리집합을 이해하여 미지수의 최솟값을 구한다.

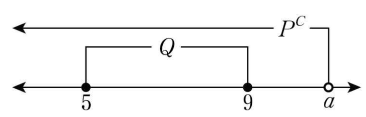
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

q가 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset P^C$이다.

$P^C=\{x\,|\,x<a\}$, $Q=\{x\,|\,5\le x\le9\}$이므로

$Q\subset P^C$을 만족시키는 a의 값의 범위는 $a>9$

따라서 자연수 a의 최솟값은 10



12. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

점 A의 x좌표를 $a\,(a>0)$이라 하면 $f(a)=g(a)$이므로

$2\sqrt{a}=\frac{1}{4}a^2$에서 $4a=\frac{1}{16}a^4$, $a\ne0$이므로 $a^3=64$

$a=4$이고 $f(4)=4$이므로 점 A의 좌표는 $(4,4)$이다.

선분 OA를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times4+3\times0}{1+3},\ \frac{1\times4+3\times0}{1+3}\right)$이므로 $\mathrm{P}(1,1)$

점 P를 지나고 x축에 평행한 직선 위에 두 점 B, C가 있으므로, 두 점 B, C의 y좌표는 각각 1이다.

점 B의 좌표를 $(b,1)\,(b>0)$이라 하면

점 B는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(b)=1$

$2\sqrt{b}=1$에서 $b=\frac{1}{4}$

점 C의 좌표를 $(c,1)\,(c>0)$이라 하면

점 C는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로 $g(c)=1$

$\frac{1}{4}c^2=1$에서 $c=2$

따라서 $\mathrm{A}(4,4)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},1\right)$, $\mathrm{C}(2,1)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{1}{4}\right)\times(4-1)=\frac{21}{8}$

13. [출제의도] 켤레복소수를 이해하여 식의 값을 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$z\bar{z}+2z=2i$에서

$(a+bi)(a-bi)+2(a+bi)=2i$

$(a^2+b^2+2a)+2bi=2i$

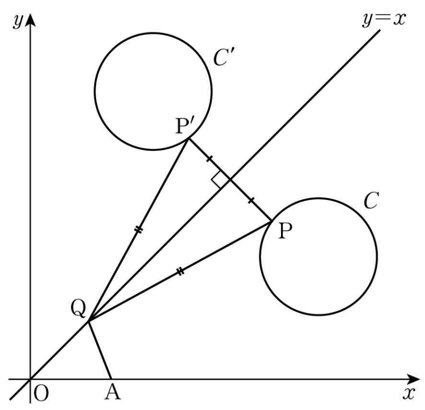
a, b는 실수이므로

$a^2+b^2+2a=0$, $2b=2$

에서 $a=-1$, $b=1$

따라서 $z=-1+i$이므로 $z^2=(-1+i)^2=-2i$

14. [출제의도] 도형의 방정식을 이용하여 선분의 길이의 합의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

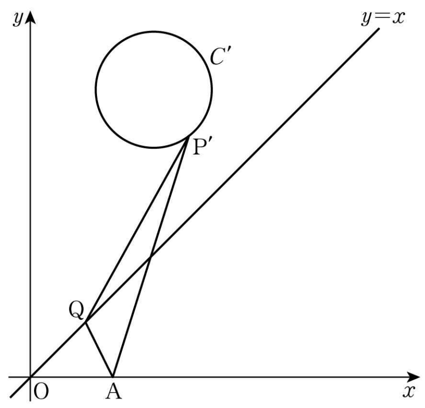


원 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형을 원 C'이라 하면

원 C'의 방정식은 $(x-3)^2+(y-7)^2=2$이다.

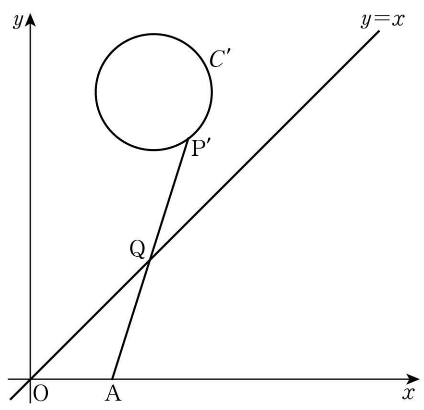
점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 점 P′은 원 C' 위에 있고

$\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QP'}}$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP'}}$이다.



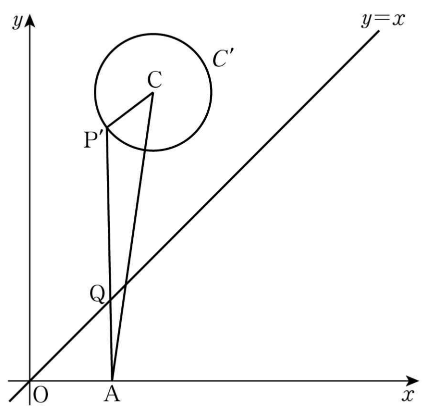
세 점 P′, Q, A가 한 직선 위에 있지 않으면 삼각형 P′QA에서 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP'}}>\overline{\mathrm{AP'}}$이고,

세 점 P′, Q, A가 한 직선 위에 있으면 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP'}}=\overline{\mathrm{AP'}}$이다.

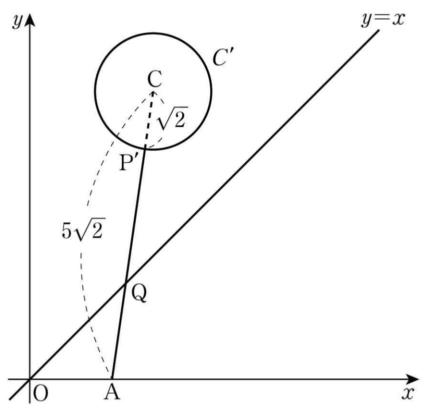


즉, $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP'}}\ge\overline{\mathrm{AP'}}$ …… ㉠

이고, ㉠의 등호는 세 점 P′, Q, A가 한 직선 위에 있을 때 성립한다.



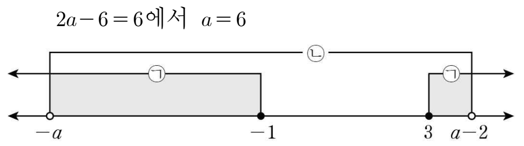
한편, 원 C'의 중심을 C라 할 때
세 점 C, P′, A가 한 직선 위에 있지 않으면
삼각형 CP′A에서 $\overline{\mathrm{AP'}}+\overline{\mathrm{P'C}}>\overline{\mathrm{AC}}$이고,
$\overline{\mathrm{AC}}=5\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{P'C}}=\sqrt{2}$이므로
$\overline{\mathrm{AP'}}>\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{P'C}}=4\sqrt{2}$이다.



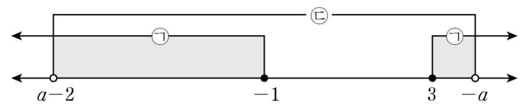
세 점 C, P′, A가 한 직선 위에 있으면 $\overline{\mathrm{AP'}}$은 점 P′이 선분 AC 위에 있을 때 최소이다.
이때, $\overline{\mathrm{AP'}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{P'C}}=4\sqrt{2}$
그러므로 $\overline{\mathrm{AP'}}\ge4\sqrt{2}$ …… ㉡
이고, ㉡의 등호는 점 P′이 선분 AC 위에 있을 때 성립한다.
㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$의 최솟값은 $4\sqrt{2}$

15. [출제의도] 연립부등식을 이용하여 미지수의 값의 합을 구하는 문제를 해결한다.

$x^2-2x-3\ge0$에서 $(x+1)(x-3)\ge0$
$x\le-1$ 또는 $x\ge3$ …… ㉠
(i) $-a<a-2$, 즉 $a>1$인 경우
$(x+a)(x-a+2)<0$에서
$-a<x<a-2$ …… ㉡
주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 6이므로, $(a-2)-(-a)-1=2a-1\ge6$
$a\ge\frac{7}{2}$이고, $-a<-1$
① $a-2\le3$, 즉 $a\le5$인 경우
㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는
$-a<x\le-1$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 $-1-(-a)=a-1$
$a\le5$이므로 $a-1$은 6이 될 수 없다.
② $a-2>3$, 즉 $a>5$인 경우
㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는
$-a<x\le-1$ 또는 $3\le x<a-2$이고
정수 x의 개수는
$\{-1-(-a)\}+\{(a-2)-3\}=(a-1)+(a-5)=2a-6$
$2a-6=6$에서 $a=6$



(ii) $-a=a-2$, 즉 $a=1$인 경우
$(x+a)(x-a+2)<0$을 만족시키는 정수 x의 개수는 0이므로, 조건을 만족시키지 않는다.
(iii) $-a>a-2$, 즉 $a<1$인 경우
$(x+a)(x-a+2)<0$
$a-2<x<-a$ …… ㉢
주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 6이므로, $(-a)-(a-2)-1=-2a+1\ge6$
$a\le-\frac{5}{2}$이고 a는 정수이므로 $a\le-3$
$a-2<-1$, $3\le-a$이므로
㉠, ㉢에서 연립부등식의 해는
$a-2<x\le-1$ 또는 $3\le x<-a$이고
정수 x의 개수는
$\{-1-(a-2)\}+\{(-a)-3\}=(-a+1)+(-a-3)$
$=-2a-2$
$-2a-2=6$에서 $a=-4$

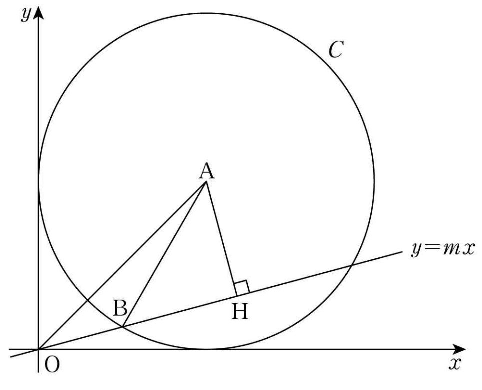


(i)~(iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 값은 6, -4이고 그 합은 2

16. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

총 6권의 책을 5명의 학생들에게 남김없이 나누어 주고, 책을 한 권도 받지 못하는 학생이 없으므로 한 학생만 2권의 책을 받는다.
(i) 한 학생이 2권의 동화책을 받는 경우
조건 (가)에서 2권의 동화책을 받을 2학년 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
이 학생이 받을 2권의 동화책을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
남은 1권의 동화책을 받을 2학년 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$
조건에서 남은 세 학생들에게 시집 3권을 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_3=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times3\times2\times6=108$
(ii) 한 학생이 1권의 동화책과 1권의 시집을 받는 경우
조건 (가)에서 1권의 동화책과 1권의 시집을 받을 2학년 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
이 학생이 받을 동화책과 시집을 각각 1권씩 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$
조건 (가)에서 남은 2명의 2학년 학생에게 남은 2권의 동화책을 나누어 주는 경우의 수는
${}_2\mathrm{P}_2=2$
조건에서 2명의 1학년 학생에게 남은 2권의 시집을 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{P}_2=2$
그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times9\times2\times2=108$
(iii) 한 학생이 2권의 시집을 받는 경우
조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(i)~(iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는 $108+108=216$

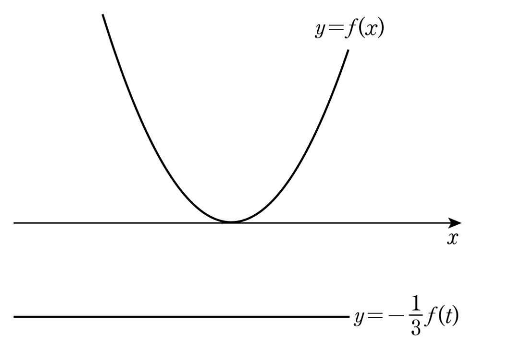
17. [출제의도] 도형의 방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.



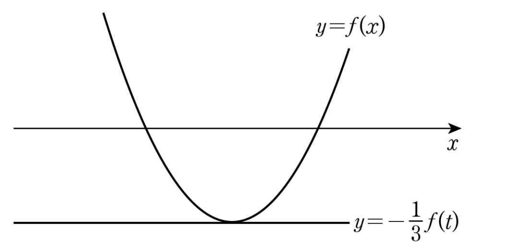
$\overline{\mathrm{AB}}=3$이고 $\overline{\mathrm{BH}}=t$라 하면 삼각형 ABH에서
$\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2=9-t^2$ …… ㉠
원 C의 중심 A의 좌표는 $(3, 3)$이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=3\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}:1$에서 $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3}t$
삼각형 AOH에서
$\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2=18-3t^2$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $9-t^2=18-3t^2$, $t^2=\frac{9}{2}$
한편, $\overline{\mathrm{AH}}$는 점 A와 직선 $y=mx$ 사이의 거리이므로
$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|3m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$
이 식을 ㉠에 대입하면
$\frac{9(m-1)^2}{m^2+1}=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$
$2(m-1)^2=m^2+1$
$m^2-4m+1=0$
$m=2+\sqrt{3}$ 또는 $m=2-\sqrt{3}$
$0<m<1$이므로, 주어진 조건을 만족시키는 상수 m의 값은 $2-\sqrt{3}$

18. [출제의도] 이차방정식과 이차함수와의 관계를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

x에 대한 방정식 $f(x)\times\left(f(x)+\frac{1}{3}f(t)\right)=0$의 실근은
곡선 $y=f(x)$와 x축, 곡선 $y=f(x)$와
직선 $y=-\frac{1}{3}f(t)$의 교점의 x좌표와 같다.
(i) 곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점의 개수가 0인 경우
함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. 그러므로 모든 실수 t에 대하여 $-\frac{1}{3}f(t)<0$이고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{3}f(t)$의 교점은 존재하지 않는다.
따라서 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) 곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점의 개수가 1인 경우
함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이다. 그러므로 모든 실수 t에 대하여 $-\frac{1}{3}f(t)\le0$이고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{3}f(t)$의 교점의 개수는 0 또는 1이다.
따라서 조건을 만족시키지 않는다.



(iii) 곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점의 개수가 2인 경우
그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{3}f(t)$는 x축 위에 있지 않은 한 점에서만 만나야 하므로 직선 $y=-\frac{1}{3}f(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 접해야 한다.



곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 y좌표를 q라 하면 조건을 만족시키는 실수 t의 값이 -1, 7이므로

$q=-\frac{1}{3}f(-1)$, $q=-\frac{1}{3}f(7)$

$f(-1)+3q=f(7)+3q=0$이므로

이차다항식 $f(x)+3q$는 $x+1$과 $x-7$을 인수로 갖는다.

$f(x)+3q=(x+1)(x-7)$

$f(x)=(x-3)^2-16-3q$

이때, q는 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 y좌표이므로

$q=-16-3q$, $q=-4$

따라서 $f(x)=(x-3)^2-4$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $f(10)=45$

19. [출제의도] 집합을 추론하여 집합의 원소의 합의 최댓값을 구한다.

$p\in X$에 대하여 $\frac{p+2}{3}\in X$이려면 $p\in\{1, 4, 7, 10\}$

이때, $p\in\{1, 4, 7, 10\}$인 p에 대하여

p, $\frac{p+2}{3}$, $\frac{p+2}{3}+3$을 순서쌍

$\left(p, \frac{p+2}{3}, \frac{p+2}{3}+3\right)$으로 나타내면

$(1, 1, 4)$, $(4, 2, 5)$, $(7, 3, 6)$, $(10, 4, 7)$

한편, 집합 $A\cap B$와 집합 $B-A$는 서로소이므로 순서쌍 $(1, 1, 4)$에서

$1\in A\cap B$이면 $1\in B-A$가 되어 모순이다.

그러므로 $A\cap B\subset\{4, 7, 10\}$이고,

$n(A\cap B)=2$인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $A\cap B=\{4, 7\}$인 경우

2, 3은 집합 $B-A$의 원소이고,

5, 6은 집합 $A-B$의 원소이다.

8, 9, 10은 3을 더한 수가 집합 X의 원소가 아니므로 8, 9, 10은 집합 $B-A$의 원소가 아니다.

$n(B-A)=3$이므로 $1\in B$이다. $B-A=\{1, 2, 3\}$이므로 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 6이다.

(ⅱ) $A\cap B=\{7, 10\}$인 경우

3, 4는 집합 $B-A$의 원소이고,

6은 집합 $A-B$의 원소이다.

8, 9는 3을 더한 수가 집합 X의 원소가 아니므로 8, 9는 집합 $B-A$의 원소가 아니다.

$1\in B-A$이면 $4\in A$가 되어 모순이다.

$n(B-A)=3$이므로 $2\in B$ 또는 $5\in B$

집합 $B-A$는 $\{2, 3, 4\}$ 또는 $\{3, 4, 5\}$이므로 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 9 또는 12이다.

(ⅲ) $A\cap B=\{4, 10\}$인 경우

$10\in A\cap B$이므로 $4\in B-A$

그런데 $4\in A\cap B$이므로 모순이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 집합 $B-A$의 모든 원소의 합의 최댓값은 12

20. [출제의도] 인수정리를 이용하여 식의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이고 $h(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 조건 (가)에서

$f(x)g(x)=(x-1)h(x)A(x)$ …… ㉠

을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 일차다항식 $A(x)$가 존재한다.

$g(x)h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 조건 (나)에서

$g(x)h(x)=(x-2)f(x)B(x)$ …… ㉡

을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 일차다항식 $B(x)$가 존재한다. 따라서

$f(x)g(x)\times g(x)h(x)=(x-1)(x-2)f(x)h(x)A(x)B(x)$

$(g(x))^2=(x-1)(x-2)A(x)B(x)$

$(g(1))^2=0$, $g(1)=0$이므로 $g(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

마찬가지로 $g(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다. 이때, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$g(x)=(x-1)(x-2)$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$f(x)(x-1)(x-2)=(x-1)h(x)A(x)$

$f(x)(x-2)=h(x)A(x)$

$h(2)A(2)=0$이다.

이때 $h(2)\neq 0$이면, $A(2)=0$이므로 $A(x)=x-2$이다.

$f(x)(x-2)=h(x)(x-2)$이고

$f(x)=h(x)$이므로 두 다항식 $f(x)$, $h(x)$가 서로 다르다는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $h(2)=0$이고, $h(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

마찬가지로 ㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x-1)(x-a)$, $h(x)=(x-2)(x-b)$라 하면

㉠에서

$(x-1)(x-a)\times(x-1)(x-2)$

$=(x-1)\times(x-2)(x-b)\times A(x)$

$(x-1)(x-a)=(x-b)A(x)$에서 $b=1$ 또는 $a=b$

$b=1$이면 $g(x)=h(x)$이므로 두 다항식 $g(x)$, $h(x)$가 서로 다르다는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a=b$이고

$f(-1)+g(-1)=2a+8=18$

$a=5$, $b=5$

$h(0)=(-2)\times(-b)=2b=10$

21. [출제의도] 합성함수와 역함수를 이용하여 방정식의 실근의 차를 구하는 문제를 해결한다.

α, β는 x에 대한 방정식 $g(x)=\frac{1}{k}x-2$의 두 실근이므로 $g(\alpha)=\frac{1}{k}\alpha-2$, $g(\beta)=\frac{1}{k}\beta-2$ …… ㉠

함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고 정의역이 실수 전체의 집합이므로 함수 $g^{-1}(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이다. 따라서 $f(x)=g^{-1}(x-2)$에서 함수 $f(x)$의 치역도 실수 전체의 집합이다.

그러므로 $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$를 만족시키는 서로 다른 두 실수 a, b가 존재하고 ㉠에 의하여

$g(f(a))=\frac{1}{k}f(a)-2$, $g(f(b))=\frac{1}{k}f(b)-2$ …… ㉡

조건에서 $g(f(a))=a-2$, $g(f(b))=b-2$이므로

㉡으로부터

$a-2=\frac{1}{k}f(a)-2$, $b-2=\frac{1}{k}f(b)-2$이다.

즉, $ka=f(a)$, $kb=f(b)$ …… ㉢

㉢에서 두 실수 a, b는 x에 대한 방정식 $f(x)=kx$의 두 근이다.

조건에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=kx$와 서로 다른 두 점 A, B에서만 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 교점의 x좌표는 a 또는 b이다.

한편, 원 $(x-13)^2+(y-13)^2=26$의 중심을 C라 하고 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{HC}}=\frac{|13k-13|}{\sqrt{k^2+1}}$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{13}$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{13}$이다.

직각삼각형 AHC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{26}$,

$\overline{\mathrm{HC}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2$에서

$\frac{(13k-13)^2}{k^2+1}=26-13=13$

$k>1$이므로 $k=\frac{3}{2}$이다.

$y=\frac{3}{2}x$와 $(x-13)^2+(y-13)^2=26$을 연립하면

$(x-13)^2+\left(\frac{3}{2}x-13\right)^2=26$에서

$\frac{13}{4}x^2-65x+312=0$이고

$x^2-20x+96=(x-8)(x-12)=0$에서

$x=8$ 또는 $x=12$

그러므로

방정식 $f(x)=kx$의 두 실근은 8, 12 …… (*)

$k=\frac{3}{2}$이므로 $f(x)=\frac{3}{2}x$의 양변에

$x=8$, $x=12$를 대입하면

$f(8)=12$, $f(12)=18$이고

(*)에 의하여

$\beta-\alpha=f(12)-f(8)$

$=18-12$

$=6$

[다른 풀이]

모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))=x-2$이고

함수 $g(x)$의 역함수가 존재하므로

$f(x)=g^{-1}(x-2)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 교점은

함수 $y=g^{-1}(x-2)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 교점과 같다. 그리고 함수 $y=g^{-1}(x-2)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)+2$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또한 직선 $y=kx$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형은 직선 $y=\frac{1}{k}x$이므로

함수 $y=g^{-1}(x-2)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 교점은 함수 $y=g(x)+2$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{k}x$의 교점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다. …… (*)

한편, 방정식 $g(x)=\frac{1}{k}x-2$의 실근은

방정식 $g(x)+2=\frac{1}{k}x$의 실근과 같고

이는 함수 $y=g(x)+2$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{k}x$의 교점의 x좌표이다.

그러므로 방정식 $g(x)=\frac{1}{k}x-2$의 두 실근의 차 $\beta-\alpha$는 함수 $y=g(x)+2$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{k}x$의 두 교점의 x좌표의 차와 같고

(*)에 의하여 $\beta-\alpha$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 두 교점 A, B의 y좌표의 차와 같다.

따라서 두 점 A, B의 y좌표를 각각 a, b라 하면

직선 AB의 기울기가 $\frac{3}{2}$이므로

두 점 A, B의 x좌표의 차는 $\frac{2}{3}\times|b-a|$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{13}$이므로

$|b-a|^2+\left(\frac{2}{3}|b-a|\right)^2=(2\sqrt{13})^2$에서

$\beta-\alpha=|b-a|=6$

22. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 집합의 원소의 합을 계산한다.

$A\cap B=\{6, 9\}$이므로 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 15

23. [출제의도] 삼각형의 무게중심의 좌표를 계산한다.

세 점 A$(2, 0)$, B$(2, 6)$, C$(0, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+2+0}{3}, \frac{0+6+3}{3}\right)$

이므로 $p=\frac{4}{3}$, $q=3$

따라서 $p\times q=\frac{4}{3}\times3=4$

24. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-ax+13=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=13$

그러므로 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{a}{13}=2$

따라서 $a=26$

25. [출제의도] 원의 접선의 방정식을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은 $x+y=2$
직선 $y=-x+2$가 곡선 $y=x^2+ax+2a$에 접하므로 이차방정식 $-x+2=x^2+ax+2a$는 중근을 갖는다.
그러므로 이차방정식 $x^2+(a+1)x+2a-2=0$의 판별식을 D라 할 때,
$D=(a+1)^2-4\times(2a-2)$
$\quad=a^2-6a+9=(a-3)^2=0$
따라서 $a=3$

26. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축은 직선 $x=2$이고 모든 실수 k에 대하여 $-k^2\le 2\le 3+k^2$이다.
(ⅰ) $a<0$인 경우
모든 실수 k에 대하여 $f(-k^2)<f(3+k^2)<f(2)$이므로 $-k^2\le x\le 3+k^2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=b$로 일정하여 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $a>0$인 경우
모든 실수 k에 대하여 $f(2)<f(3+k^2)<f(-k^2)$이므로 $-k^2\le x\le 3+k^2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-k^2)$이다.
$f(-k^2)=a(-k^2-2)^2+b=a(k^2+2)^2+b$
$\quad=ak^4+4ak^2+4a+b$
이고, 모든 실수 k에 대하여
$ak^4+4ak^2+4a+b=3k^4+12k^2$이 성립하므로
$a=3$, $4a+b=0$에서 $b=-12$이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a^2+b^2=9+144=153$

27. [출제의도] 순열의 수와 조합의 수를 이해하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

(ⅰ) 학생 A가 좌석 번호가 11 또는 21인 의자에 앉는 경우
학생 B가 좌석 번호가 22 이하인 의자에 앉으면 두 학생 C와 D가 앉을 수 있는 의자는 네 개이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{P}_2=36$
학생 B가 좌석 번호가 31 또는 32인 의자에 앉으면 두 학생 C와 D가 앉을 수 있는 의자는 세 개이므로 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_2=12$
그러므로 구하는 경우의 수는 $2\times(36+12)=96$
(ⅱ) 학생 A가 좌석 번호가 31인 의자에 앉는 경우
학생 B가 좌석 번호가 22 이하인 의자에 앉으면 두 학생 C와 D가 앉을 수 있는 의자는 세 개이므로 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_2=24$
학생 B가 좌석 번호가 32인 의자에 앉으면 두 학생 C와 D가 앉을 수 있는 의자는 두 개이므로 경우의 수는 ${}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{P}_2=2$
그러므로 구하는 경우의 수는 $24+2=26$
(ⅲ) 학생 A가 좌석 번호가 41인 의자에 앉는 경우
학생 B가 좌석 번호가 22 이하인 의자에 앉으면 두 학생 C와 D가 앉을 수 있는 의자는 세 개이므로 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_2=24$
학생 B가 좌석 번호가 31 또는 32인 의자에 앉으면 두 학생 C와 D가 앉을 수 있는 의자는 두 개이므로 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{P}_2=4$
그러므로 구하는 경우의 수는 $24+4=28$
(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$96+26+28=150$

28. [출제의도] 합성함수를 이용하여 집합의 모든 원소의 합의 최댓값을 추론한다.

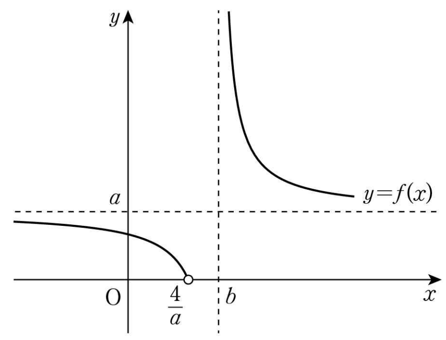
$f(k)=(3^k$의 일의 자리의 수$)$이므로
$f(1)=f(5)=f(9)=3$, $f(2)=f(6)=9$,
$f(3)=f(7)=7$, $f(4)=f(8)=1$
X의 두 부분집합
$P=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Q=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여
$x\in P$이면 $(f\circ f)(x)=7$이고, $x\in Q$이면 $(f\circ f)(x)=3$
이므로 $A\subset P$이다.
임의의 $a\in A$에 대하여 $f(a)\in A$이므로 $f(a)\in A$에 대하여 $f(f(a))\in A$이다. 즉, $7\in A$이다.
한편, $9\in A$이면 $7<9$이고 $f(7)>f(9)$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다. 그러므로 $9\not\in A$이다.
$3\not\in A$이면 $n(A)\ge 2$이므로 $1\in A$ 또는 $5\in A$이고, 조건 (나)에서 $f(1)=f(5)=3\in A$가 되어 모순이다. 그러므로 $3\in A$이다.
즉, $\{3, 7\}\subset A\subset\{1, 3, 5, 7\}$이다.
그런데 $5\in A$이면 $3<5$이고 $f(3)>f(5)$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다. 그러므로 $5\not\in A$이다.
즉, $\{3, 7\}\subset A\subset\{1, 3, 7\}$이다.
따라서 가능한 모든 집합 A는
$A=\{3, 7\}$ 또는 $A=\{1, 3, 7\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은 $1+3+7=11$

29. [출제의도] 행렬을 추론하여 주어진 식의 값을 구한다.

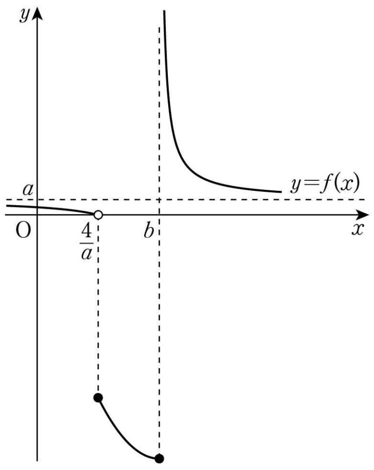
$A^2=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{a_{11}}^2+a_{12}a_{21}&a_{12}(a_{11}+a_{22})\\a_{21}(a_{11}+a_{22})&a_{12}a_{21}+{a_{22}}^2\end{pmatrix}$
$\quad=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$
조건 (가)에서 $i=1$, $j=2$일 때, ${a_{12}}^2(a_{11}+a_{22})=0$
$a_{12}=0$이면
$A=\begin{pmatrix}a_{11}&0\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}{a_{11}}^2&0\\a_{21}(a_{11}+a_{22})&{a_{22}}^2\end{pmatrix}$
$a_{12}+b_{12}=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $a_{12}\ne 0$이고 $a_{11}+a_{22}=0$
$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&-a_{11}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}{a_{11}}^2+a_{12}a_{21}&0\\0&{a_{11}}^2+a_{12}a_{21}\end{pmatrix}$
조건 (가)에서 $i=1$, $j=1$에 대하여
$a_{11}\times({a_{11}}^2+a_{12}a_{21})=0$
행렬 B가 영행렬이 아니므로, ${a_{11}}^2+a_{12}a_{21}\ne 0$이다.
그러므로 $a_{11}=0$
즉, 두 행렬 A, B는
$A=\begin{pmatrix}0&a_{12}\\a_{21}&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{12}a_{21}&0\\0&a_{12}a_{21}\end{pmatrix}$이고,
$A+B=\begin{pmatrix}a_{12}a_{21}&a_{12}\\a_{21}&a_{12}a_{21}\end{pmatrix}$의 모든 성분의 곱이 -8이므로
${a_{12}}^3{a_{21}}^3=-8$이고, $a_{12}a_{21}$이 실수이므로
$a_{12}a_{21}=-2$ …… ㉠
$A+B$의 모든 성분의 합이 -1이므로
$a_{12}+a_{21}+2a_{12}a_{21}=-1$
$a_{12}+a_{21}=3$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
${a_{12}}^3+{a_{21}}^3=(a_{12}+a_{21})^3-3a_{12}a_{21}(a_{12}+a_{21})$
$\quad=3^3-3\times(-2)\times 3=27+18=45$

30. [출제의도] 함수의 그래프를 추론하여 미지수의 값을 구한다.

$x<\dfrac{4}{a}$ 또는 $x>b$에서
$f(x)=\left|\dfrac{ax-4}{x-b}\right|=\left|\dfrac{ab-4}{x-b}+a\right|$
(ⅰ) $a>0$인 경우
$b>\dfrac{4}{a}$에서 $ab>4$, $b>0$이므로
$x<\dfrac{4}{a}$ 또는 $x>b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



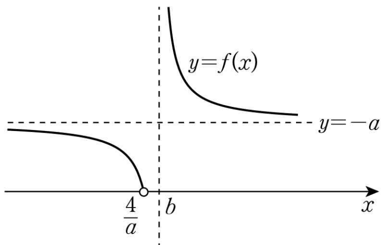
함수 $f(x)$가 일대일함수이기 위해서는
$\dfrac{4}{a}\le x\le b$에서 $f(x)\le 0$이어야 한다. …… $(*)$
x에 대한 방정식 $f(x)=k$의 해가 존재하지 않도록 하는 양수 k의 값 p는 a이다.
함수 $y=ax^2-4bx$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{2b}{a}$에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$가 일대일함수이기 위해서는
$\dfrac{2b}{a}\le\dfrac{4}{a}$ 또는 $b\le\dfrac{2b}{a}$
이어야 한다.
① $\dfrac{2b}{a}\le\dfrac{4}{a}$, 즉 $b\le 2$인 경우
$\dfrac{4}{a}\le x\le b$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은
$f\left(\dfrac{4}{a}\right)=a\times\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{16b}{a}$
$\quad=\dfrac{16}{a}-\dfrac{16b}{a}$
이므로 $m=\dfrac{16}{a}-\dfrac{16b}{a}$
조건 (나)에서
$p\times m=a\times\left(\dfrac{16}{a}-\dfrac{16b}{a}\right)$
$\quad=-64$
$16-16b=-64$
$b=5$이므로 $b\le 2$를 만족시키지 않는다.
② $b\le\dfrac{2b}{a}$, 즉 $a\le 2$인 경우
$\dfrac{4}{a}\le x\le b$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은
$f(b)=ab^2-4b^2$
이므로 $m=ab^2-4b^2$
$0<a\le 2$이고 a는 정수이므로
$a=1$ 또는 $a=2$
$a=1$이면
조건 (나)에서 $p\times m=1\times(-3b^2)=-64$
$b^2=\dfrac{64}{3}$
이므로 b가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.
$a=2$이면
조건 (나)에서 $p\times m=2\times(-2b^2)=-64$
$b^2=16$
b는 0보다 큰 유리수이므로 $b=4$
$\dfrac{4}{a}\le x\le b$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{4}{a}\right)$이고
$f\left(\dfrac{4}{a}\right)=f(2)=8-32=-24<0$이므로 $(*)$을 만족시킨다.
그러므로 ①, ②에서 $a=2$, $b=4$일 때 함수 $f(x)$는 주어진 조건을 만족시킨다.



(ii) $a<0$인 경우

$b>\frac{4}{a}$에서 $ab<4$이므로

$x<\frac{4}{a}$ 또는 $x>b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 일대일함수이기 위해서는

$\frac{4}{a} \le x \le b$에서 $f(x) \le 0$이어야 한다. …… (**)

x에 대한 방정식 $f(x)=k$의 해가 존재하지 않도록 하는 양수 k의 값 p는 $-a$이다.

함수 $y=ax^2-4bx$의 그래프는 직선 $x=\frac{2b}{a}$에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$가 일대일함수이기 위해서는

$\frac{2b}{a} \le \frac{4}{a}$ 또는 $b \le \frac{2b}{a}$

이어야 한다.

① $\frac{2b}{a} \le \frac{4}{a}$, 즉 $b \ge 2$인 경우

$\frac{4}{a} \le x \le b$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$$f\left(\frac{4}{a}\right)=a\times\frac{16}{a^2}-\frac{16b}{a}$$
$$=\frac{16}{a}-\frac{16b}{a}$$
$$=\frac{16}{a}(1-b)>0$$

이므로 (**)을 만족시키지 않는다.

② $b \le \frac{2b}{a}$인 경우

$\frac{4}{a} \le x \le b$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$$f\left(\frac{4}{a}\right)=\frac{16}{a}-\frac{16b}{a}$$

이므로 $m=\frac{16}{a}-\frac{16b}{a}$

조건 (나)에서

$$p\times m=-a\times\left(\frac{16}{a}-\frac{16b}{a}\right)$$
$$=-64$$

$-16+16b=-64$

$b=-3$

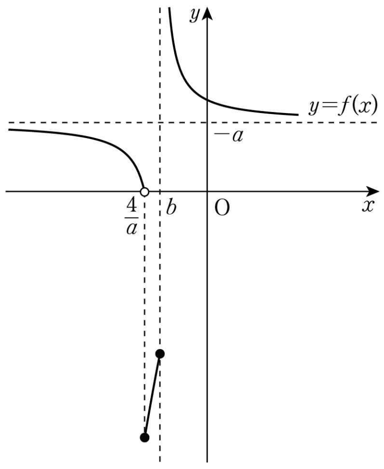
$b>\frac{4}{a}$에서 $-3>\frac{4}{a}$이고 a는 0보다 작은 정수이므로 $a=-1$

$\frac{4}{a} \le x \le b$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(b)$이고

$$f(b)=f(-3)=-9-36$$
$$=-45<0$$

이므로 (**)을 만족시킨다.

그러므로 ①, ②에서 $a=-1$, $b=-3$일 때 함수 $f(x)$는 주어진 조건을 만족시킨다.



따라서 (i), (ii)에서 주어진 식을 만족시키는 모든 순서쌍은 (2, 4), (−1, −3)이므로

$a_1\times b_1\times a_2\times b_2=2\times4\times(-1)\times(-3)=24$