• 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정 답

1	③	2	⑤	3	①	4	②	5	⑤
6	④	7	④	8	①	9	③	10	②
11	⑤	12	①	13	⑤	14	②	15	③
16	30	17	15	18	124	19	14	20	67
21	48	22	80						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$4^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2^1=2$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=4x+1$이므로

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4+1=5$

3. [출제의도] 등차수열을 이해하여 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$2a_2+a_7=2(2+d)+(2+6d)=6+8d=30$

$d=3$

$a_{10}=2+9d=2+9\times 3=29$

4. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(ax^2-2)=4a-2$

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=f(2)=6$

$4a-2=6,\ a=2$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=(x+1)'(2x^2-5x+1)+(x+1)(2x^2-5x+1)'$

$\quad =1\times(2x^2-5x+1)+(x+1)(4x-5)$

이므로

$f'(2)=-1+9=8$

6. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 주어진 값을 구한다.

a가 양수이므로

$\log_3 a^2=2\log_3 a=4,\ \log_3 a=2,\ a=3^2$

$a=9$

$\log_9 ab=\log_9 9b=1+\log_9 b=\dfrac{5}{2},\ \log_9 b=\dfrac{3}{2},\ b=9^{\frac{3}{2}}$

$b=27$

따라서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{27}{9}=3$

7. [출제의도] 정적분을 이해하여 직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$0\le x\le 2$에서 $x^2\ge x-2$이므로 구하는 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_0^2\{x^2-(x-2)\}dx=\int_0^2(x^2-x+2)dx$

$\displaystyle\quad=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2$

$\quad=\dfrac{8}{3}-2+4=\dfrac{14}{3}$

8. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\dfrac{\cos\theta}{4}\right)^2+\cos^2\theta=\dfrac{17}{16}\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\dfrac{16}{17}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

9. [출제의도] 함수의 극값을 이해하여 함수의 최댓값을 구한다.

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

닫힌구간 $[1,3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(2)=16-12-24+a=-20+a=4$

$a=24$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+24$이므로

$f(1)=2-3-12+24=11$

$f(3)=54-27-36+24=15$

닫힌구간 $[1,3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 15이므로

$M=15$

10. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$y=\log_2(x-k)$에 $y=0$을 대입하면 $0=\log_2(x-k)$

$2^0=1=x-k,\ x=k+1$

이므로 $\mathrm{A}(k+1,0)$

점 B의 x좌표를 t라 하면 점 B의 y좌표는 2이므로

$\log_2(t-k)=2,\ 2^2=t-k,\ t=k+4$

이므로 $\mathrm{B}(k+4,2)$

점 C는 직선 $y=2$가 y축과 만나는 점이므로 $\mathrm{C}(0,2)$

삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로

선분 BC의 중점을 M이라 할 때

$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이고 점 M의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같다.

$\mathrm{M}\left(\dfrac{k+4}{2},2\right)$이므로

$\dfrac{k+4}{2}=k+1,\ k+4=2k+2,\ k=2$

그러므로 $\mathrm{A}(3,0),\ \mathrm{B}(6,2),\ \mathrm{C}(0,2),\ \mathrm{M}(3,2)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\times 6\times 2=6$

11. [출제의도] 정적분을 이해하여 점의 위치와 움직인 거리를 구한다.

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는

$\displaystyle 0+\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1(3t^2-24t+36)\,dt$

$\displaystyle\quad=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^1=25$ (참)

ㄴ. $v(t)=3(t^2-8t+12)=3(t-2)(t-6)$

시각 $t=2,\ t=6$일 때 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다. (참)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^3|v(t)|\,dt=\int_0^3|3t^2-24t+36|\,dt$

$\displaystyle\quad=\int_0^2(3t^2-24t+36)\,dt+\int_2^3\{-(3t^2-24t+36)\}\,dt$

$\displaystyle\quad=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^2+\left[-t^3+12t^2-36t\right]_2^3$

$\quad=(32-0)+\{-27-(-32)\}=37$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12. [출제의도] 등비수열을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$n=1$일 때, $\dfrac{a_1}{b_1+1}=2$에서 $b_1=\dfrac{1}{2}$이다.

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\displaystyle\frac{a_n}{b_n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}$이므로

$\quad=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$\dfrac{a_n}{b_n+1}=\boxed{2}\times n$ …… ㉠

이다.

$n=1$일 때도 ㉠이 성립하므로

모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{a_n}{n}=\boxed{2}\times(b_n+1)$ …… ㉡

이다.

$n=2$일 때, $\dfrac{a_2}{2}=2\times(b_2+1)$에서 $b_2=\dfrac{3}{2}$이다.

그러므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\boxed{3}$이다.

따라서 ㉡에 의하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}=2\times\sum_{n=1}^{5}(b_n+1)=2\times\left(\sum_{n=1}^{5}b_n+\sum_{n=1}^{5}1\right)$

$\displaystyle\quad=2\times\left\{\frac{\frac{1}{2}(3^5-1)}{3-1}+5\right\}=2\times\left(\frac{121}{2}+5\right)=\boxed{131}$이다.

$p=2,\ q=3,\ r=131$이므로 $p+q+r=136$

13. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2-8x+6$이므로

점 $\mathrm{P}(1,-5)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=x-6$

점 Q의 좌표를 $(t,f(t))$라 하면

$f(t)=t-6$

$t^3-4t^2+5t-2=0,\ (t-1)^2(t-2)=0$

점 Q는 점 P가 아닌 점이므로 $t=2$이다.

점 $\mathrm{Q}(2,-4)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=2x-8$

이 직선의 x절편은 4, y절편은 -8이므로

구하는 도형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 4\times|-8|=16$

14. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 함수를 추론한다.

실수 k에 대하여

(i) $k=0$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해는 $x=0$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\dfrac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\dfrac{7}{4}\pi\right)=0$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 0 또는 $\dfrac{7}{4}\pi$로 2개다.

(ii) $0<k<3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해의 합은 π

① $\pi\le x\le 2\pi$에서 방정식 $a\cos x+b=k$의 해가 존재하면 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 2π 이상이다.

② $\pi\le x\le 2\pi$에서 방정식 $a\cos x+b=k$의 해가 존재하지 않으면 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 π이다.

그러므로 조건을 만족시키는 실수 t는 존재하지 않는다.

(iii) $k=3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해는 $x=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는

모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 $\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi$로 2개다.

(iv) $k<0$ 또는 $k>3$인 경우

$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해가 존재하지 않으므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=k$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 $\frac{7}{4}\pi$로 1개다.

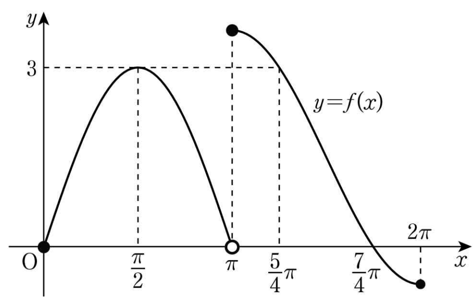
(i)~(iv)에서 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$이고 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$인 경우에만 조건을 만족시킨다.

$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=a\cos\frac{5}{4}\pi+b=-\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=3$ …… ㉠

$f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=a\cos\frac{7}{4}\pi+b=\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서 $a^2+b^2=\frac{9}{2}+\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$



15. [출제의도] 도함수를 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}\left(-xf(x)-ax^2\right)=0$

$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{4}f(x)-bx^2\right)=\frac{1}{4}f(0)$

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)$에서

$f(0)=0$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-hf(h)-ah^2}{h}=\lim_{h\to 0-}\left(-f(h)-ah\right)=-f(0)=0$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{1}{4}f(h)-bh^2}{h}=\frac{1}{4}f'(0)$$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$에서

$f'(0)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $f(x)=x^3+px^2$을 만족시키는 실수 p가 존재한다.

$g_1(x)=-xf(x)-ax^2=-x^4-px^3-ax^2$,

$g_2(x)=\frac{1}{4}f(x)-bx^2=\frac{1}{4}x^3+\left(\frac{p}{4}-b\right)x^2$

이라 하자.

$x\le 0$에서 $\lim_{x\to -\infty}g(x)=-\infty$이고 $g(0)=0$이므로 $g(\alpha)=-27$을 만족시키는 실수 α가 구간 $(-\infty, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

$g_1{}'(x)=-x(4x^2+3px+2a)$이고 조건 (나)에서 $g'(\alpha)=0$이므로 실수 β가 존재하여 α, β는 이차방정식 $4x^2+3px+2a=0$의 근이다.

(i) $\beta<\alpha<0$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty, \beta)$에서 증가하고 구간 (β, α)에서 감소하므로 $g(k)=-27$이지만 $g'(k)\ne 0$인 실수 k가 구간 $(-\infty, \beta)$에 존재하여 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha<\beta<0$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 (α, β)에서 감소하고 구간 $(\beta, 0)$에서 증가하며 $g(0)=0$이므로 $g(k)=-27$이지만 $g'(k)\ne 0$인 실수 k가 구간 $(\beta, 0)$에 존재하여 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\alpha<0\le\beta$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 $(\alpha, 0)$에서 감소하므로 $g(\alpha)=-27$이고 $g(0)=0$인 것에 모순이다.

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키기 위해서는 $\beta=\alpha$이어야 한다.

이차방정식 $4x^2+3px+2a=0$의 근과 계수와의 관계에 의하여

$2\alpha=-\frac{3}{4}p$, $\alpha^2=\frac{a}{2}$

$p=-\frac{8}{3}\alpha$, $a=2\alpha^2$

$g(\alpha)=-\alpha^4+\frac{8}{3}\alpha^4-2\alpha^4=-\frac{1}{3}\alpha^4=-27$

$\alpha^4=81$, $\alpha=3$ 또는 $\alpha=-3$

$\alpha<0$이므로 $\alpha=-3$이고 $p=8$, $a=18$

$x\le 0$에서 $g(x)=-27$을 만족시키는 x의 값은 α뿐이므로 조건 (가)에 의하여 $\gamma>0$인 실수 γ가 존재하여 $g(\gamma)=-27$, $g'(\gamma)=0$을 만족시킨다.

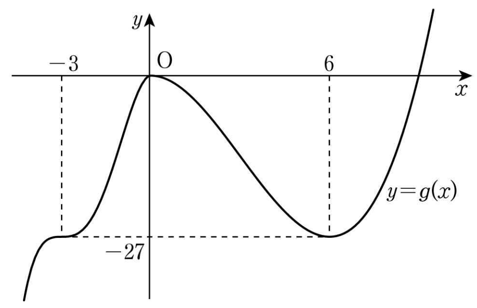
$g_2{}'(x)=\frac{3}{4}x^2+(4-2b)x=0$에서

$\gamma=\frac{8}{3}(b-2)$

$g(\gamma)=g\left(\frac{8}{3}(b-2)\right)=-\frac{64}{27}(b-2)^3=-27$

$b-2=\frac{9}{4}$, $b=\frac{17}{4}$

따라서 $a+b=18+\frac{17}{4}=\frac{89}{4}$



16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 항을 구한다.

$n=1$일 때, $a_2=a_1^2-3\times 1=3^2-3=6$

$n=2$일 때, $a_3=a_2^2-3\times 2=6^2-6=30$

따라서 $a_3=30$

17. [출제의도] 부정적분을 이용하여 함숫값을 계산한다.

$F(x)=\int(4x^3-3x^2+2)\,dx$

$=x^4-x^3+2x+C$ (단, C는 적분상수)

$F(1)=2+C=5$이므로 $C=3$이다.

따라서 $F(2)=12+C=15$

18. [출제의도] 코사인법칙을 이해하여 변의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$

$=6^2+8^2-2\times 6\times 8\times\left(-\frac{1}{4}\right)=124$

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2-12x+a$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 $f'(1)=0$

$a=9$

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 5를 가지므로

$f(3)=27-54+27+b=5$에서

$b=5$

따라서 $a+b=9+5=14$

20. [출제의도] 수열의 성질을 이용하여 수열의 합에 대한 문제를 해결한다.

자연수 t에 대하여

$a_{5t-4}+a_{5t-3}+a_{5t-2}+a_{5t-1}+a_{5t}$

$=(5t-4)+(5t-3)+(5t-2)+(5t-1)+\{(-4)\times 5t+10\}$

$=20t-10+(-20t+10)=0$

$\sum_{k=1}^{5t}a_k=\sum_{k=1}^{t}\left(a_{5k-4}+a_{5k-3}+a_{5k-2}+a_{5k-1}+a_{5k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{t}0=0$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\begin{cases}5t-4 & (m=5t-4)\\ 10t-7 & (m=5t-3)\\ 15t-9 & (m=5t-2)\\ 20t-10 & (m=5t-1)\\ 0 & (m=5t)\end{cases}$$

(i) $m=5t-4$이면 $20\le 5t-4<30$에서 $t=5$, 6이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 21, 26이다.

(ii) $m=5t-3$이면 $20\le 10t-7<30$에서 $t=3$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 12이다.

(iii) $m=5t-2$이면 $20\le 15t-9<30$에서 $t=2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 8이다.

(iv) $m=5t-1$이면 $20\le 20t-10<30$에서 $\frac{3}{2}\le t<2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 모든 자연수 m의 값의 합은

$21+26+12+8=67$

21. [출제의도] 정적분을 이용하여 함수를 추론한다.

$g(x)=\int_0^x\left(f(t)-|f(t)|\right)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f(x)-|f(x)|$이므로

$$g'(x)=\begin{cases}2f(x) & (f(x)<0)\\ 0 & (f(x)\ge 0)\end{cases}$$

조건 (가)에서 $x\ge 2$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고 충분히 작은 양수 h에 대하여 열린구간 $(2-h, 2)$에서 $f(x)<0$이다.

삼차함수 $f(x)$의 부호가 $x=2$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌어야 하므로 $f(2)=0$이다.

$f(x)$는 최고차항이 1인 삼차함수이고

$f(0)=0$, $f(2)=0$이며 $x\ge 2$에서 $f(x)\ge 0$이므로

$f(x)=x(x-2)(x-a)$를 만족시키는 실수 $a\,(a<2)$가 존재한다.

(i) $0<a<2$인 경우

$0<x\le a$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고

$a<x<2$인 모든 x에 대하여 $f(x)<0$이므로

$g(2)=\int_0^2\left(f(t)-|f(t)|\right)dt$

$=\int_0^a 0\,dt+\int_a^2 2f(t)\,dt$

$= \int_a^2 2t(t-2)(t-a)\,dt$

$= \int_a^2 \{2t^3-(2a+4)t^2+4at\}dt$

$= \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{2a+4}{3}t^3 + 2at^2\right]_a^2$

$= \frac{1}{6}a^4 - \frac{2}{3}a^3 + \frac{8}{3}a - \frac{8}{3}$

$h(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}$이라 하면

$h'(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(x+1)(x-2)^2$

$0<x<2$에서 $h'(x)>0$이고 $h(0) = -\frac{8}{3}$이므로

$0<a<2$인 모든 a에 대하여 $h(a) > -\frac{8}{3}$이다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a \le 0$인 경우

$0<x<2$인 모든 x에 대하여 $f(x)<0$이고

조건 (나)에서 $g(2) = -8$이므로

$g(2) = \int_0^2 (f(t) - |f(t)|)\,dt = \int_0^2 2f(t)\,dt$

$= \int_0^2 2t(t-2)(t-a)\,dt$

$= \int_0^2 \{2t^3-(2a+4)t^2+4at\}dt$

$= \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{2a+4}{3}t^3 + 2at^2\right]_0^2$

$= \frac{8}{3}a - \frac{8}{3} = -8$

에서 $a=-2$

(i), (ii)에 의하여 $f(x) = x(x-2)(x+2)$

따라서 $f(4) = 4\times2\times6 = 48$

22. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 두 점 사이의 거리에 관한 문제를 해결한다.

직선 $x=t$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$이 되도록 하는 실수 t의 값을 a, $b\,(a \ne b)$라 하자.

$h(x) = g(x) - f(x)$라 하면

a, b는 방정식 $|h(x)| = \frac{1}{5}$의 근이다.

$h(x) = 2\times4^x - 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$= 2\times\left(2^x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{8} > -\frac{1}{5}$

이므로 a, b는 방정식 $h(x) = \frac{1}{5}$의 근이다.

$2\times4^x - 2^x + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{5} = 0$에서 $2^x = X\,(X>0)$이라 하면

2^a, 2^b은 X에 대한 이차방정식

$2X^2 - X + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{5} = 0$

의 근이다.

이차방정식 $2X^2 - X + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{5} = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = 1 - 4\times2\times\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{5}\right) = \frac{13}{5} - \frac{8}{2^k} > 0$

$\frac{8}{2^k} < \frac{13}{5}$

$\frac{40}{13} < 2^k$ …… ㉠

한편, $X>0$이므로 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$2^a\times2^b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{5}\right) > 0$, $\frac{1}{2^k} > \frac{1}{5}$

$2^k < 5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 자연수 k의 값은 2이다.

$2^p = 2^{a+b} = 2^a\times2^b$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{5}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{40}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1}{2^p} = 40$

따라서 $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p = 2\times40 = 80$

[확률과 통계]

23	②	24	④	25	①	26	③	27	⑤
28	③	29	864	30	100				

23. [출제의도] 중복조합의 수를 계산한다.

${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = 21$

24. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

서로 다른 종류의 연필 4자루를 세 명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

25. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 4가 되려면
2가 적힌 카드가 양 끝에 있거나,
1, 3이 적힌 카드가 양 끝에 한 장씩 있어야 한다.

(i) 2가 적힌 카드가 양 끝에 있는 경우

2, □, □, □, □, □, 2

에서 □에 1, 1, 1, 3, 3을 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!} = 10$

(ii) 1, 3이 적힌 카드가 양 끝에 한 장씩 있는 경우

△, □, □, □, □, □, △

에서 △에 1, 3을 나열하는 경우의 수는 2

□에 1, 1, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!1!} = 30$

구하는 경우의 수는 $2\times30 = 60$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $10+60 = 70$

26. [출제의도] 중복조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

(i) $d=0$인 경우

$a+b+c=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = 10$

(ii) $d \ge 1$인 경우

$a+b+c+(d-1) = 4$에서 $d' = d-1$이라 하자.

$a+b+c+d' = 4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d'의 모든 순서쌍 (a, b, c, d')의 개수는

${}_4H_4 = {}_{4+4-1}C_4 = {}_7C_4 = 35$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는
$10+35 = 45$

27. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

(i) $n(A\cap B) = 2$인 경우

집합 $\{-4, 4\}$, $\{-2, 2\}$, $\{-1, 1\}$ 중 한 개가 집합 $A\cap B$의 부분집합이므로 집합 $A\cap B$를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

남은 4개의 원소는 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중 하나의 원소이므로 이 세 집합을 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

구하는 순서쌍의 개수는 $3\times81 = 243$

(ii) $n(A\cap B) = 4$인 경우

집합 $\{-4, 4\}$, $\{-2, 2\}$, $\{-1, 1\}$ 중 두 개가 집합 $A\cap B$의 부분집합이므로 집합 $A\cap B$를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$

남은 2개의 원소는 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중 하나의 원소이므로 이 세 집합을 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$

구하는 순서쌍의 개수는 $3\times9 = 27$

(iii) $n(A\cap B) = 6$인 경우

$A\cap B = U$이므로 구하는 순서쌍의 개수는 1

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는 $243+27+1 = 271$

28. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 함수의 개수를 추론한다.

조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(9)$의 값을 정하는 경우의 수는

1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$

조건 (나)를 만족시키지 못하는 경우는
$(f(x), f(x+1), f(x+2))$가 $(1, 1, 2)$ 또는 $(2, 2, 4)$인 $x\in X$가 존재하는 경우이다.

(i) $(1, 1, 2)$인 $x\in X$가 존재하는 경우

1, 1, 2를 하나의 문자 a로 보고

a, 1, 2, 4, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{4!1!1!1!} = 210$

(ii) $(2, 2, 4)$인 $x\in X$가 존재하는 경우

2, 2, 4를 하나의 문자 a로 보고

a, 1, 1, 1, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!3!1!} = 140$

(iii) $(1, 1, 2)$인 $x\in X$와 $(2, 2, 4)$인 $y\in X$가 존재하는 경우

1, 1, 2, 2, 4를 하나의 문자 a로 보고

a, 1, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!1!1!} = 20$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키지 못하는 경우의 수는 $210+140-20 = 330$

따라서 구하는 경우의 수는 $1260-330 = 930$

29. [출제의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

흰색 접시를 배열하는 원순열의 수는
$(5-1)! = 24$

조건 (가)에서 각각의 흰색 접시 사이에
검은색 접시가 한 개씩 있다.

조건 (나)에서 8, 10이 적힌 검은색 접시는 9가 적힌 흰색 접시와 이웃하지 않으므로, 8, 10이 적힌 두 검은색 접시를 놓는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

남은 세 자리에 2, 4, 6이 적힌 검은색 접시를 놓는 경우의 수는 ${}_3P_3 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times6\times6 = 864$

30. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

$a_n = 1$ 또는 $a_n = -1$이다. $\sum_{n=1}^{11} a_n = 3$이므로

$a_n = 1$인 n이 7개, $a_n = -1$인 n이 4개 존재한다.

▲□△□△□△□△□△□▲에서

6개의 □에 1이 적힌 카드를 한 장씩 놓고

△와 ▲에 -1이 적힌 카드를 놓는다고 하자.

△에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장 놓으면

$a_n = -1$인 자연수 n이 2개 나오고,

▲에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장 놓으면

$a_n = -1$인 자연수 n이 1개 나온다.

$a_n = -1$인 n이 4개 존재하려면

두 개의 △에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장씩 놓거나

한 개의 △와 두 개의 ▲에 -1이 적힌 카드를

적어도 한 장씩 놓아야 한다.

(i) 두 개의 △에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장씩 놓는 경우

두 개의 △를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

두 개의 △에 카드를 놓는 경우의 수는

$x_1+x_2=6\ (x_1\ge1,\ x_2\ge1)$을 만족시키는 정수 $x_1,\ x_2$의 모든 순서쌍 (x_1, x_2)의 개수와 같다.

$x_1'=x_1-1,\ x_2'=x_2-1$이라 하면

$x_1'+x_2'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1',\ x_2'$의 모든 순서쌍 (x_1', x_2')의 개수는

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4=5$

구하는 경우의 수는 $10\times5=50$

(ii) 한 개의 △와 두 개의 ▲에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장씩 놓는 경우

한 개의 △를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

한 개의 △와 두 개의 ▲에 카드를 놓는 경우의 수는 $x_1+x_2+x_3=6\ (x_1\ge1,\ x_2\ge1,\ x_3\ge1)$을 만족시키는 정수 $x_1,\ x_2,\ x_3$의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수와 같다.

$x_1'=x_1-1,\ x_2'=x_2-1,\ x_3'=x_3-1$이라 하면

$x_1'+x_2'+x_3'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1',\ x_2',\ x_3'$의 모든 순서쌍 (x_1', x_2', x_3')의 개수는 ${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3=10$

구하는 경우의 수는 $5\times10=50$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$50+50=100$

[미적분]

23	③	24	④	25	①	26	②	27	⑤
28	③	29	11	30	57				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(12n+1)}{4n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^3+n^2}{4n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n^3}}=3$$

24. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(3n+2)a_n\times\frac{b_n}{n}\times\frac{n}{3n+2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n}}$$

$$=6\times2\times\frac{1}{3}=4$$

25. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$n\ge2$일 때, $a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

26. [출제의도] 등비수열의 극한을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 합을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+2a\times\left(\frac{2}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{a}\right)^n}$$

(i) $a>2$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{a}\right)^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=5$

$5=a+1$에서 $a=4$

(ii) $a=2$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{a}\right)^n=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=\frac{9}{2}$

이므로 $a=2$는 조건을 만족시키지 못한다.

(iii) $a=1$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+2^{n+1}}{1+2^n}=2$$

$2=1+1$이므로 $a=1$은 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a=1$ 또는 $a=4$이므로 조건을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은 5

27. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은

$y=a_nx$

모든 자연수 n에 대하여 점 $(2n-1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n인 원을 C_n이라 하자.

직선 $y=a_nx$가 원 C_n과 서로 다른 두 점에서 만나므로 점 $(2n-1, 0)$과 직선 $y=a_nx$ 사이의 거리는 n보다 작다.

$\frac{a_n(2n-1)}{\sqrt{a_n^2+1}}<n,\ \frac{1}{a_n^2}>\frac{3n^2-4n+1}{n^2}$ …… ㉠

직선 $y=a_nx$가 원 C_{n+1}과 만나지 않으므로 점 $(2n+1, 0)$과 직선 $y=a_nx$ 사이의 거리는 $n+1$보다 크다.

$\frac{a_n(2n+1)}{\sqrt{a_n^2+1}}>n+1,\ \frac{1}{a_n^2}<\frac{3n^2+2n}{n^2+2n+1}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{3n^2-4n+1}{n^2}<\frac{1}{a_n^2}<\frac{3n^2+2n}{n^2+2n+1}$$

$$\frac{4n+3}{n^2+2n+1}<3-\frac{1}{a_n^2}<\frac{4n-1}{n^2}$$

$$\frac{4n^2+3n}{n^2+2n+1}<n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)<\frac{4n^2-n}{n^2}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{n^2+2n+1}=4$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{n^2}=4$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)=4$

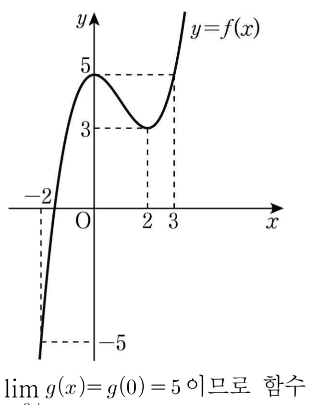
28. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 추론하여 함숫값을 구한다.

$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-3x=\frac{3}{2}x(x-2)=0$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 5, $x=2$에서 극솟값 3을 갖는다.

$f(x)=5$에서 $x^2(x-3)=0$, $x=0$ 또는 $x=3$이고

$f(x)=-5$에서 $(x+2)(x^2-5x+10)=0$, $x=-2$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)=5$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(f(x)\right)^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{\left(f(x)\right)^{2n}+5^{2n}}$에서

(i) $|f(x)|>5$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}=0$이므로

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+g(x)\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}}=f(x)$$

(ii) $|f(x)|=5$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}=1$이므로

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+g(x)\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}}=\frac{f(x)+g(x)}{2}$$

(iii) $|f(x)|<5$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x)}{5}\right)^{2n}=0$이므로

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\frac{f(x)}{5}\right)^{2n}+g(x)}{\left(\frac{f(x)}{5}\right)^{2n}+1}=g(x)$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (|f(x)|>5)\\ \frac{f(x)+g(x)}{2} & (|f(x)|=5)\\ g(x) & (|f(x)|<5)\end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

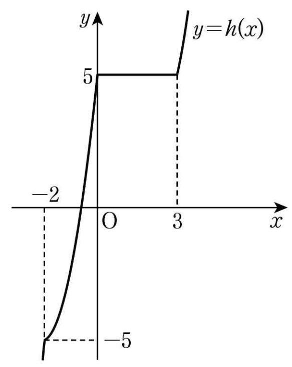
$h(-2)=\lim_{x\to-2}h(x)$이다. $|f(-2)|=5$이므로

$h(-2)=\lim_{x\to-2-}h(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$

$h(-2)=\lim_{x\to-2+}h(x)=\lim_{x\to-2+}g(x)=g(-2)$

즉 $f(-2)=g(-2)$, $-5=2p-q+5$, $q=2p+10$

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$에서 모든 자연수 n에 대하여

$k-1<k-\frac{1}{2^n}<k$이다.

두 점 $(-2, -5)$, $(0, 5)$를 지나는 직선의 기울기가 5이고 $\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\left(\frac{p}{2}x+\frac{q}{2}\right)=\frac{q}{2}$이다.

$k\le5$일 때,

$\lim_{x\to-2-}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}=\lim_{x\to-2-}\frac{1}{2}(x^2-5x+10)=12$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

$5<k\le\frac{q}{2}$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=4$, $\lim_{n\to\infty}a_n=4$이다.

$k>\frac{q}{2}$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}a_n=3$이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$가 되도록 하는 자연수 k의 개수가 7이므로 $5<k\le\frac{q}{2}$에서 $12\le\frac{q}{2}<13$, $24\le q<26$이다.

q가 자연수이므로 $q=24$ 또는 $q=25$이고,

$p=\frac{q-10}{2}$에서 p가 자연수이므로 $p=7$, $q=24$이다.

$h(4)=f(4)=32-24+5=13$이므로 $p+q+h(4)=44$

29. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

삼각형 ABC가 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이고 점 P가 선분 AB의 중점이므로 $\angle CPB=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 CPB에서 $\overline{BP}^2=\overline{BC}^2-\overline{CP}^2=n^2$이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=n$

두 점 P, Q가 각각 선분 AB, 선분 BC의 중점이므로 두 선분 PQ와 AC는 서로 평행하고 $\angle CAB=\angle QPB$

$\angle CAB=\angle PQR$이므로 $\angle QPB=\angle PQR$

엇각의 크기가 같으므로 두 선분 AB와 DQ는 서로 평행하고, $\angle ABC=\angle RQC$이다. 점 Q가 선분 BC의 중점이므로 점 R은 선분 AC의 중점이다.

삼각형 CRQ와 삼각형 CAB는 서로 닮음인 삼각형이고 닮음비가 $1:2$이므로 $\overline{RQ}=n$, $\overline{CQ}=2n+1$

$\overline{DR}=x$, $\overline{DC}=2x$ $(x>0)$이라 하자.

직각삼각형 CPB에서 $\cos(\angle PBC)=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BC}}=\dfrac{n}{4n+2}$

$\angle PBC=\angle DQC$이므로 삼각형 CDQ에서 코사인법칙에 의해 $\overline{CD}^2=\overline{DQ}^2+\overline{CQ}^2-2\times\overline{DQ}\times\overline{CQ}\times\cos(\angle DQC)$

$(2x)^2=(x+n)^2+(2n+1)^2-2(x+n)(2n+1)\cos(\angle PBC)$

$3x^2-nx-4n^2-4n-1=0$

$x>0$이므로 $\overline{DR}=x=\dfrac{n+\sqrt{49n^2+48n+12}}{6}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{DR}-\frac{4}{3}n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\sqrt{49n^2+48n+12}-7n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{48n+12}{\sqrt{49n^2+48n+12}+7n}\right)$$
$$=\frac{4}{7}$$

따라서 $p=7$, $q=4$이므로 $p+q=11$

30. [출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.

$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n$의 값이 존재하므로

$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n=0$ 또는 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n=1$

(i) $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n=1$인 경우

$\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|=1$, $a+b=1$, $|a|=1$을 모두 만족시켜야 한다. $a+b=1$에서 $\dfrac{|2\times1-20|}{|k|}=1$, 즉 $k=18$

$k=18$일 때 $a+b=1$, $|a|=1$을 만족시키는 정수 (a, b)의 순서쌍은 $(-1, 2)$와 $(1, 0)$ 뿐이므로 정수 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수는 2이다.

(ii) $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n=0$인 경우

$\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=0$이므로 $a+b=0\,(a\neq0)$ 또는 $a=0$

$\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|<1$에서 $|2a+2b-20|<k\le20$

$a+b=0\,(a\neq0)$일 때, 부등식을 만족시키지 못한다.

$a=0$일 때, $|2b-20|<k$ 즉 $10-\dfrac{k}{2}<b<10+\dfrac{k}{2}$

k가 홀수인 경우, 부등식을 만족시키는 정수 b의 개수는 k이고

k가 짝수인 경우, 부등식을 만족시키는 정수 b의 개수는 $k-1$이다.

$k=18$, $k=19$, $k=20$인 경우 조건을 만족시키는 정수 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수는 각각 17, 19, 19이다.

$k\le17$인 경우 조건을 만족시키는 정수 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수는 17 이하이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 k의 값은 18, 19, 20이므로 $18+19+20=57$

[기하]

23	①	24	③	25	②	26	④	27	⑤
28	③	29	12	30	52				

23. [출제의도] 포물선의 방정식을 계산하여 준선의 방정식을 구한다.

$y^2=20x=4\times5\times x$이므로 포물선 $y^2=20x$의 준선은 $x=-5$이다. 따라서 $k=-5$

24. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 두 초점 사이의 거리를 구한다.

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{25}=1$의 단축의 길이가 6이므로

$2a=6$, $a=3$

타원의 두 초점의 좌표를 $(0, c)$, $(0, -c)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=25-a^2=16$, $c=4$

따라서 타원의 두 초점 사이의 거리는 $2c=8$

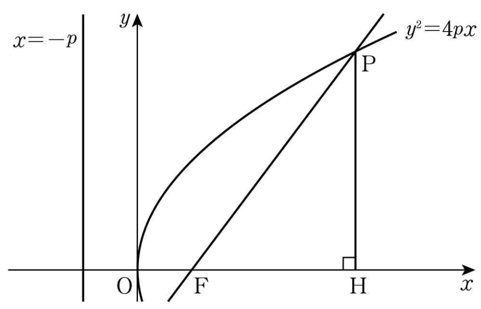
25. [출제의도] 쌍곡선의 점근선의 방정식을 이해하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구한다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5a^2}-\dfrac{y^2}{a^2+1}=1$의 점근선 중 기울기가 음수인 점근선의 방정식은 $y=-\sqrt{\dfrac{a^2+1}{5a^2}}\,x$이므로

$-\sqrt{\dfrac{a^2+1}{5a^2}}=-\dfrac{1}{2}$, $4(a^2+1)=5a^2$, $a=2$ $(a>0)$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\times\sqrt{5a^2}=4\sqrt{5}$

26. [출제의도] 포물선의 정의를 이해하여 미지수의 값을 구한다.



포물선의 초점을 $F(p, 0)$이라 하자.

이 포물선의 준선은 $x=-p$이다.

점 P와 포물선의 준선 사이의 거리가 20이고

점 P는 포물선 위의 점이므로 $\overline{FP}=20$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직선 FP의 기울기가 $\dfrac{4}{3}$이므로

$\overline{FH}=3a$, $\overline{PH}=4a$ $(a>0)$이라 하자.

$\overline{FP}^2=\overline{FH}^2+\overline{PH}^2$에서

$20^2=(3a)^2+(4a)^2$, $25a^2=400$, $a=4$

즉 $\overline{FH}=3a=3\times4=12$

점 P와 포물선의 준선 사이의 거리가

점 H와 포물선의 준선 사이의 거리와 같으므로

$2p+\overline{FH}=20$, $2p+12=20$, $p=4$

27. [출제의도] 타원의 정의를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$\overline{FP}:\overline{FQ}=1:2$에서 $\overline{FP}=t$, $\overline{FQ}=2t\,(t>0)$이라 하자.

$\overline{F'P}:\overline{F'Q}=3:2$에서 $\overline{F'P}=3s$, $\overline{F'Q}=2s\,(s>0)$이라 하자.

두 점 P, Q는 모두 타원 위의 점이므로

$\overline{FP}+\overline{F'P}=t+3s=8$ …… ㉠

$\overline{FQ}+\overline{F'Q}=2t+2s=8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $t+3s=2t+2s$, 즉 $t=s=2$

$\overline{F'P}=3s=6$, $\overline{PQ}=3t=6$, $\overline{F'Q}=2s=4$이므로

삼각형 F'QP는 $\overline{F'P}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이다.

$\cos(\angle F'QP)=\dfrac{1}{3}$이므로

삼각형 FF'Q에서 코사인법칙에 의해

$\overline{FF'}^2=\overline{FQ}^2+\overline{F'Q}^2-2\times\overline{FQ}\times\overline{F'Q}\times\cos(\angle F'QF)$

$(2c)^2=4^2+4^2-2\times4\times4\times\dfrac{1}{3}$, $4c^2=\dfrac{64}{3}$, $c=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

28. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이용하여 원의 반지름의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

원 C의 반지름의 길이를 r이라 하자.

$\overline{PQ}+\overline{FQ}=1$이므로 $\overline{FQ}=1-r$

두 점 P, Q는 쌍곡선 위의 점이고 $\overline{FP}=\overline{QP}=r$이므로

$\overline{F'P}-\overline{FP}=\overline{FQ}-\overline{F'Q}$, $(\overline{F'Q}+\overline{QP})-\overline{FP}=\overline{FQ}-\overline{F'Q}$

$2\times\overline{F'Q}=\overline{FQ}$에서 $\overline{F'Q}=\dfrac{1-r}{2}$

즉 $\overline{F'P}=\overline{F'Q}+\overline{QP}=\dfrac{1-r}{2}+r=\dfrac{1+r}{2}$

삼각형 FPF'은 $\angle F'FP=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\cos(\angle FPF')=\dfrac{\overline{FP}}{\overline{F'P}}=\dfrac{r}{\dfrac{1+r}{2}}=\dfrac{2r}{1+r}$

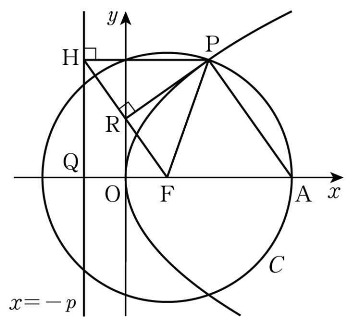
삼각형 FPQ에서 코사인법칙에 의해

$\overline{FQ}^2=\overline{FP}^2+\overline{QP}^2-2\times\overline{FP}\times\overline{QP}\times\cos(\angle FPF')$

$(1-r)^2=r^2+r^2-2\times r\times r\times\dfrac{2r}{1+r}$, $3r^3-3r^2-r+1=0$

$(3r^2-1)(r-1)=0$, $0<r<1$이므로 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

29. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 미지수를 구하는 문제를 해결한다.



점 P는 포물선 위의 점이므로 $\overline{PH}=\overline{FP}=r$

선분 PH와 선분 FA는 평행하고 $\overline{PH}=\overline{FP}=\overline{FA}=r$

이므로 사각형 APHF는 평행사변형이다.

포물선의 준선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자.

$\angle QFH=\angle PHF$이고, $\overline{FQ}=2p$이므로

$\overline{FH}=\dfrac{\overline{FQ}}{\cos(\angle QFH)}=2\sqrt{3}p$

$\sin^2(\angle PHF)=1-\cos^2(\angle PHF)=\dfrac{2}{3}$, $\sin(\angle PHF)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

평행사변형 APHF의 넓이는 삼각형 FPH의 넓이의 2배이므로

$2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{PH}\times\overline{FH}\times\sin(\angle PHF)=54\sqrt{2}$

$2\times\dfrac{1}{2}\times r\times2\sqrt{3}p\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=54\sqrt{2}$, $rp=27$ …… ㉠

삼각형 PHF는 $\overline{PH}=\overline{FP}$인 이등변삼각형이므로

점 P에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 R이라 하면

$\overline{HR}=\dfrac{1}{2}\times\overline{FH}=\sqrt{3}p$

삼각형 PHR에서

$\cos(\angle PHR)=\dfrac{\overline{HR}}{\overline{PH}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}p}{r}$, $r=3p$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $3p^2=27$이므로 $p=3$, $r=9$

따라서 $p+r=12$

30. [출제의도] 쌍곡선과 타원의 관계를 추론하여 타원의 장축의 길이를 구한다.

쌍곡선의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2a^2}=1$에서

$c^2=a^2+2a^2=3a^2$, $c=\sqrt{3}a$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2a^2}=1$에서 $x=-\sqrt{3}a$일 때 $y=\pm2a$

그러므로 $\overline{F'P}=2a$

점 P가 쌍곡선 위의 점이고 쌍곡선의 주축의 길이가 $2a$이므로 $\overline{FP}-\overline{F'P}=2a$, $\overline{FP}=4a$

직각삼각형 PF'F에서 $\sin(\angle F'FP)=\dfrac{\overline{F'P}}{\overline{FP}}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\angle F'FP=\dfrac{\pi}{6}$

$\overline{FA}=c+a=(\sqrt{3}+1)a$

$\overline{AH}=\overline{FA}\times\sin(\angle AFH)=\dfrac{(\sqrt{3}+1)a}{2}$

$\overline{FH}=\overline{FA}\times\cos(\angle AFH)=\dfrac{(3+\sqrt{3})a}{2}$

점 H와 점 Q는 타원 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{FH}}=(2+\sqrt{3})a$

점 Q는 쌍곡선 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{F'Q}}-\overline{\mathrm{FQ}}=2a$

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{F'Q}}=(\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{FQ}})+(\overline{\mathrm{F'Q}}-\overline{\mathrm{FQ}})=(4+\sqrt{3})a$

$(4+\sqrt{3})a=6+8\sqrt{3}$ 이므로 $a=2\sqrt{3}$

타원의 장축의 길이는 $(2+\sqrt{3})a=6+4\sqrt{3}$ 이므로

$p=6$, $q=4$

따라서 $p^2+q^2=36+16=52$