2026학년도 5월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	⑤	**3**	③	**4**	⑤	**5**	①
6	①	**7**	⑤	**8**	③	**9**	①	**10**	②
11	④	**12**	②	**13**	②	**14**	③	**15**	⑤
16	24	**17**	140	**18**	8	**19**	10	**20**	155
21	55	**22**	9						

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$2^{\frac{1}{3}}\times\sqrt[3]{32}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{5}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}=4$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$y'=3x^2+2$이므로

곡선 $y=x^3+2x-1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의

접선의 기울기는 $3\times1^2+2=5$

3. [출제의도] 부정적분 이해하기

함수 $f(x)$는 $\frac{d}{dx}f(x)$의 한 부정적분이고

$\int\frac{d}{dx}f(x)dx=\int(3x^2-5)dx=x^3-5x+C$

(C는 적분상수)

이므로 $f(x)=x^3-5x+c$ (c는 상수)

$f(0)=1$에서 $c=1$

따라서 $f(x)=x^3-5x+1$이므로 $f(1)=-3$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)=3+2=5$

5. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프 이해하기

곡선 $y=2^{x-a}+b$의 점근선이 직선 $y=-4$이므로

$b=-4$

곡선 $y=2^{x-a}-4$가 원점을 지나므로

$2^{-a}-4=0$에서 $a=-2$

따라서 $a+b=-6$

6. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각

$a+1,\ -a+1$이므로

$(a+1)-(-a+1)=2a=6$에서 $a=3$

함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{b}$이므로

$\frac{2\pi}{b}=3\pi$에서 $b=\frac{2}{3}$

따라서 $a+b=\frac{11}{3}$

7. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$의 양변을

x에 대하여 미분하면 $f(x)=2x-3a$

$f(0)=-3a>0$에서 $a<0$

$\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2-3a^2+2$에서 $a^2=1$

$a=-1$이므로 $f(x)=2x+3$

따라서 $f(2)=7$

8. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

a_3이 a_1과 a_5의 등비중항이므로 $a_3^2=36$

수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r\neq0)$이라 하면

$a_3=a_1r^2<0$이므로 $a_3=-6$

$a_3+2a_4=a_3+2a_3r=-6-12r$

$a_3+2a_4=2$이므로 $r=-\frac{2}{3}$

$a_3=a_2r$에서 $-6=a_2\times\left(-\frac{2}{3}\right)$

따라서 $a_2=(-6)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=9$

9. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$\lim\limits_{h\to0}\frac{g(1+h)-4}{h}=9$이고 $\lim\limits_{h\to0}h=0$이므로

$\lim\limits_{h\to0}(g(1+h)-4)=0$

함수 $g(x)=(x^2+x)f(x)$가 다항함수이므로

$\lim\limits_{h\to0}(g(1+h)-4)=g(1)-4=0$에서

$g(1)=2f(1)=4,\ f(1)=2$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{g(1+h)-4}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=g'(1)$이므로

$g'(1)=9$

또한 $g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x)f'(x)$에서

$g'(1)=3f(1)+2f'(1)=6+2f'(1)$이므로

$f'(1)=\frac{3}{2}$

따라서 $f(1)\times f'(1)=2\times\frac{3}{2}=3$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times4\times15\times\sin A=24$

에서 $\sin A=\frac{4}{5}$

각 A가 예각이므로 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{3}{5}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$

$=4^2+15^2-2\times4\times15\times\frac{3}{5}=169$

에서 $\overline{BC}=13$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{13}{\frac{4}{5}}=\frac{65}{4}$

따라서 $R=\frac{65}{8}$

11. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

(i) $a_1<0$일 때

$a_2=-2a_1>0$이므로 $a_3=a_2-3=-2a_1-3$

조건 (나)에 의하여 $-2a_1-3=a_1+4$

$a_1=-\frac{7}{3}$

(ii) $a_1\geq0$일 때

$a_2=a_1-3$

(a) $a_2\geq0$일 때

$a_3=a_2-3=a_1-6$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(b) $a_2<0$일 때

$a_2=a_1-3<0$이므로 $a_1<3$

$a_3=-2a_2=-2(a_1-3)$

조건 (나)에 의하여 $-2(a_1-3)=a_1+4$

$a_1=\frac{2}{3}$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는

모든 수열 $\{a_n\}$의 a_1의 값의 합은 $\left(-\frac{7}{3}\right)+\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

ㄱ. $v(t)=3t^2-11t+8=(3t-8)(t-1)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=\frac{8}{3}$

$0\leq t<1$에서 $v(t)>0$,

$1<t<\frac{8}{3}$에서 $v(t)<0$이므로

시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

(참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=6t-11$

$a(t)=1$에서 $t=2$

그러므로 점 P의 가속도가 1이 되는 순간의 시각 t는 2이다.

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하므로

점 P의 가속도가 1인 순간 점 P의 위치는

$0+\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(3t^2-11t+8)dt$

$=\left[t^3-\frac{11}{2}t^2+8t\right]_0^2$

$=2-0=2$ (참)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2|v(t)|dt$

$=\int_0^2|3t^2-11t+8|dt$

$=\int_0^1(3t^2-11t+8)dt+\int_1^2(-3t^2+11t-8)dt$

$=\left[t^3-\frac{11}{2}t^2+8t\right]_0^1+\left[-t^3+\frac{11}{2}t^2-8t\right]_1^2$

$=\left(\frac{7}{2}-0\right)+\left\{-2-\left(-\frac{7}{2}\right)\right\}=5$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

13. [출제의도] 평균변화율을 활용하여 문제해결하기

조건 (가)에서

$0<x\leq12$일 때 $f(x)=\frac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}$ … ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(0)=\lim\limits_{x\to0+}\frac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0+}\frac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0+}\frac{a(\sqrt{2x+1}+1)}{2}=a$

㉠에 의하여 $f(12)=\frac{12a}{\sqrt{2\times12+1}-1}=3a$

조건 (나)에서 모든 실수 k에 대하여

$\frac{f(k+12)-f(k)}{(k+12)-k}=\frac{1}{2}$

$f(k+12)=f(k)+6$ … ㉡

㉡의 양변에 $k=0$을 대입하면

$f(12)=f(0)+6,\ 3a=a+6$에서 $a=3$

㉠에 의하여 $f(4)=\frac{12}{\sqrt{2\times4+1}-1}=6$

따라서 ㉡에 의하여

$f(28)=f(16)+6=(f(4)+6)+6=18$

14. [출제의도] 삼각함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

점 A의 x좌표를 $a\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자.

곡선 $y=\sin x$가 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

점 B의 x좌표는 $\pi-a$

$\sin a=k$에서

$-\sqrt{1-k^2}=-\sqrt{1-\sin^2 a}=-\cos a$이고

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm a\right)=-\cos a$이며,

곡선 $y=\sin x\,(0\le x\le 2\pi)$와

직선 $y=-\sqrt{1-k^2}$의 교점은 C, D뿐이므로

두 점 C, D의 x좌표는 각각 $\frac{3}{2}\pi-a$, $\frac{3}{2}\pi+a$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=(\pi-a)-a=\pi-2a$

$\overline{\mathrm{CD}}=\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)-\left(\frac{3}{2}\pi-a\right)=2a$

$\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{AB}}=2a-(\pi-2a)=4a-\pi=\frac{2}{9}\pi$에서

$a=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{9}\pi+\pi\right)=\frac{11}{36}\pi$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\pi-2\times\frac{11}{36}\pi=\frac{7}{18}\pi$

15. [출제의도] 정적분 이해하기

함수 $y=-f(x)$의 그래프에 접하는 직선 중

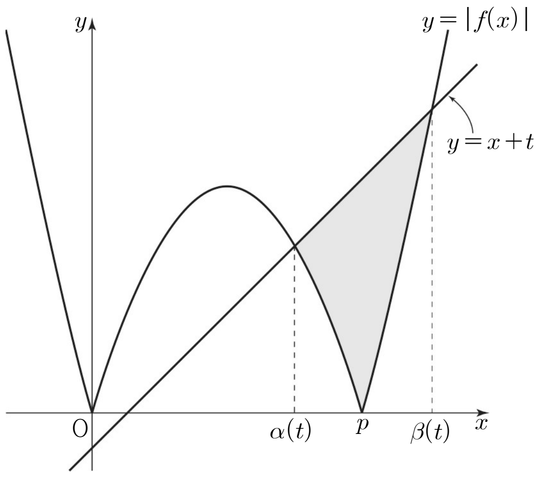
기울기가 1인 직선의 y절편을 t_1이라 하자.

$-p<t<0$ 또는 $t\ge t_1$일 때

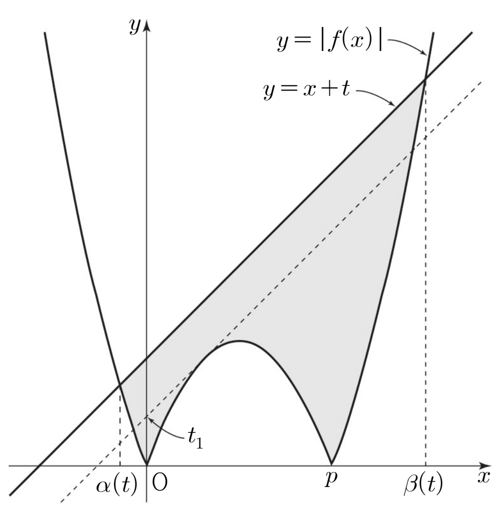
[그림 1], [그림 2]와 같이 $\alpha(t)\le x\le\beta(t)$인

모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le x+t$이므로

$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\{|f(x)|-(x+t)\}dx\le 0$



[그림 1]



[그림 2]

그러므로 함수 $g(t)$는 $0\le t<t_1$에서 최댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

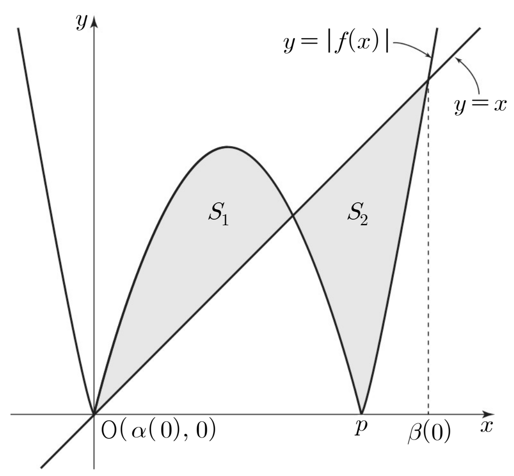
$t=0$일 때의 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와

직선 $y=x+t$의 개형은 [그림 3]과 같고,

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x$로

둘러싸인 2개 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$g(0)=S_1-S_2$



[그림 3]

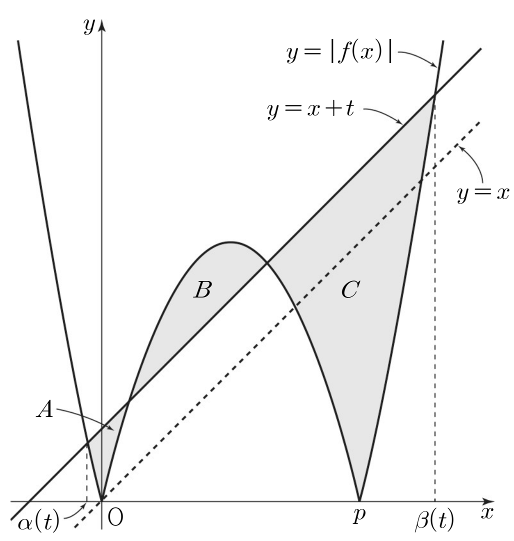
$0<t<t_1$일 때의 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와

직선 $y=x+t$의 개형은 [그림 4]와 같고,

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x+t$로

둘러싸인 3개 영역의 넓이를 각각 A, B, C라 하면

$g(t)=-A+B-C$



[그림 4]

$0<t<t_1$인 모든 실수 t에 대하여

$B<S_1$, $C>S_2$이므로

$-A+B-C<B-C<S_1-S_2$

그러므로 $0\le t<t_1$인 모든 실수 t에 대하여

$g(t)\le g(0)$이며 $g(0)=\frac{1}{2}$

방정식 $|f(x)|=x$의 해가 0, $p-1$, $p+1$이므로

$\alpha(0)=0$, $\beta(0)=p+1$

$$g(0)=\int_{\alpha(0)}^{\beta(0)}(|f(x)|-x)dx$$
$$=\int_0^{p+1}|f(x)|dx-\int_0^{p+1}x\,dx$$
$$=\int_0^{p}(-f(x))dx+\int_p^{p+1}f(x)dx-\int_0^{p+1}x\,dx$$
$$=\int_0^{p}(-x^2+px)dx+\int_p^{p+1}(x^2-px)dx-\frac{(p+1)^2}{2}$$
$$=\frac{p^3-3p^2-3p-1}{6}=\frac{1}{2}$$

$p^3-3p^2-3p-4=(p-4)(p^2+p+1)=0$

따라서 $p=4$

16. [출제의도] 호도법 이해하기

부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 8^2\times\frac{3}{4}\pi=24\pi$이므로 $a=24$

17. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}(k^2-a_{2k-1})=\sum_{k=1}^{7}k^2-\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}$에서

$$\sum_{k=1}^{7}k^2=\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{7}a_{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{7}(a_{2k-1}+a_{2k})$$
$$=\sum_{k=1}^{14}a_k$$

따라서 $\sum_{k=1}^{14}a_k=\frac{7\times8\times15}{6}=140$

18. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$x-4$, $x-6$은 로그의 진수이므로

$x-4>0$, $x-6>0$에서 $x>6$

방정식 $\log_2(x-4)=\log_{\frac{1}{2}}(x-6)+3$에서

$\log_2(x-4)=-\log_2(x-6)+3$

$\log_2(x-4)(x-6)=3$

$(x-4)(x-6)=2^3$

$x^2-10x+16=(x-2)(x-8)=0$

따라서 $x>6$이므로 $x=8$

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=x^3-3ax^2+40a^2$이라 하자.

x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 1이려면 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수가 1이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2a\,(a>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(0)=40a^2>0$이므로 $f(2a)=0$이어야 한다.

$f(2a)=8a^3-12a^3+40a^2=-4a^2(a-10)=0$

따라서 $a=10$

20. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

조건 (나)에서 $b_3+b_5\ne 2b_4$이므로

세 수 b_3, b_4, b_5는 이 순서대로 등차수열을

이루지 않는다. $\cdots$ ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$d\ge 0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이 되어

$b_n=a_n$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $d<0$이며 $a_3>a_4>a_5$이다.

(ⅰ) $a_3>a_4>a_5>0$일 때

$b_3=a_3$, $b_4=a_4$, $b_5=a_5$이므로

㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_3>a_4>0\ge a_5$일 때

$a_6=a_5+d<0$이므로 $b_6=-2a_6$

$(b_4+b_6)-2b_5=(a_4-2a_6)-2(-2a_5)$

$= (8+3d)-2(8+5d)+4(8+4d)$
$= 24+9d$
$= 3a_4 > 0$

$b_4+b_6 \neq 2b_5$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a_3 > 0 \geq a_4 > a_5$일 때
$a_3 = 8+2d > 0$에서 $d > -4$이고
$a_4 = 8+3d \leq 0$에서 $d \leq -\frac{8}{3}$이므로
$-4 < d \leq -\frac{8}{3}$
$a_6 = a_5 + d < 0$이므로 $b_6 = -2a_6$
$b_4 = -2a_4$, $b_5 = -2a_5$, $b_6 = -2a_6$이므로
$b_4 + b_6 = 2b_5$가 성립한다.
$b_3 + b_5 = 2b_4 + 6$에서
$a_3 + (-2a_5) = 2\times(-2a_4)+6$
$(8+2d) - 2\times(8+4d) = -4\times(8+3d)+6$
$-8-6d = -26-12d$, $d=-3$

(iv) $0 \geq a_3 > a_4 > a_5$일 때
$b_3 = -2a_3$, $b_4 = -2a_4$, $b_5 = -2a_5$이므로
㉠을 만족시키지 않는다.

(i) ~ (iv)에 의하여 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 -3이므로 $a_n = 8-3(n-1) = -3n+11$이고

$$b_n = \begin{cases} a_n & (n \leq 3) \\ -2a_n & (n \geq 4) \end{cases}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} b_k = \sum_{k=1}^{3} a_k - 2\sum_{k=4}^{10} a_k$
$= (8+5+2) - 2\times\frac{7(a_4+a_{10})}{2}$
$= 15 - 7(-1-19) = 155$

21. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=p$에서 연속이다.
$\lim_{x\to p-} g(x) = \lim_{x\to p-} f(x) = f(p)$이고
$g(p) = kf(0) = 0$이므로 $f(p) = 0$
$f(x) = x(x-p)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$$g(x) = \begin{cases} x(x-p)(x-a) & (x < p) \\ k(x-p)(x-2p)\{x-(a+p)\} & (x \geq p) \end{cases}$$

$p > 0$이므로 0, p, $2p$는 방정식 $g(x)=0$의 실근이다.
$a=p$ 또는 $a=0$이면 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근이 0, p, $2p$뿐이므로
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $3p$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i) $a > p$일 때
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근은
0, p, $2p$, $a+p$
$0+p+2p+(a+p) \neq 2p$이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < p$일 때
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근은
0, a, p, $a+p$, $2p$
$0+a+p+(a+p)+2p \neq 2p$이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a < 0$일 때
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은
$a+0+p+2p = a+3p$
조건 (나)에 의하여 $a+3p = 2p$에서 $a = -p$

(i), (ii), (iii)에 의하여
$a=-p$이며 $f(x) = x(x+p)(x-p)$
조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(p+h)-g(p)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{(p+h)h(2p+h)}{h} = 2p^2,$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(p+h)-g(p)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{kh(-p+h)(p+h)}{h} = -kp^2$$

에서 $2p^2 = -kp^2$, $k=-2$

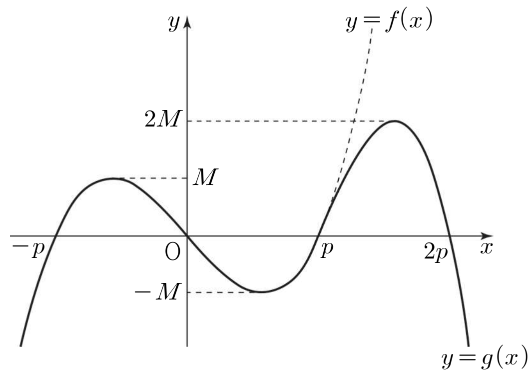
그러므로 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < p) \\ -2f(x-p) & (x \geq p) \end{cases}$

$f'(x) = 3x^2 - p^2 = 0$에서
$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}p$ 또는 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}p$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}p$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}p$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}p^3$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}p^3$	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 극댓값을 M이라 하면
함수 $f(x)$의 극솟값은 $-M$이다.
$k=-2$이므로 함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값은 $2M$이며 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

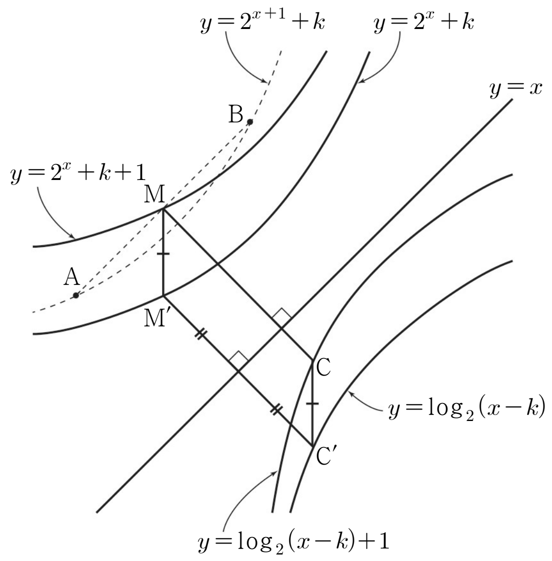


함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로
$2M = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
$2\times\frac{2\sqrt{3}}{9}p^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$에서 $p = \frac{3}{2}$
그러므로 $f(x) = x^3 - \frac{9}{4}x$
따라서 $f(4) = 4^3 - \frac{9}{4}\times 4 = 55$

22. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 추론하기

두 점 A, B 중에서 x좌표가 작은 점을 A라 하고,
점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(a, 2^{a+1}+k)$ (a는 실수)라 하자.
직선 AB의 기울기가 1이고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{2}$이므로
$\mathrm{B}(a+2, 2^{a+1}+k+2)$
점 B가 곡선 $y = 2^{x+1}+k$ 위의 점이므로
$2^{a+1}+k+2 = 2^{(a+2)+1}+k$
$(2^3-2)\times 2^a = 2$에서
$2^a = \frac{1}{3}$, $a = -\log_2 3$ $\cdots$ ㉠
이제 선분 AB의 중점을 M이라 하자.
점 M의 좌표가 $\mathrm{M}(a+1, 2^{a+1}+k+1)$이므로
점 M은 곡선 $y = 2^x+k+1$ 위의 점이다.
점 M을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨
점 $\mathrm{M}'(a+1, 2^{a+1}+k)$는 곡선 $y=2^x+k$ 위에 있고,
점 C는 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위에 있으므로
점 C를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨
점 C′은 곡선 $y=\log_2(x-k)$ 위에 있다.
직선 CM의 기울기가 -1이므로
직선 C′M′의 기울기도 -1이고,
두 곡선 $y=2^x+k$, $y=\log_2(x-k)$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 C′은 점 M′을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점이다.
점 C′의 좌표는 $\mathrm{C}'(2^{a+1}+k, a+1)$이므로
점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(2^{a+1}+k, a+2)$이다.
삼각형 ABC가 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인
정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{CM}} = \sqrt{6}$이고,
직선 CM의 기울기가 -1이므로
점 C의 x좌표와 점 M의 x좌표의 차는 $\sqrt{3}$이다.
$|(2^{a+1}+k)-(a+1)| = \sqrt{3}$
$k = -2^{a+1}+a+1+\sqrt{3}$
또는 $k = -2^{a+1}+a+1-\sqrt{3}$
그러므로 $S = -2\times 2^{a+1}+2a+2$
㉠에 의하여
$S = -2\times\frac{2}{3}+2\times(-\log_2 3)+2$
$= \frac{2}{3} - 2\log_2 3$
따라서 $2^{-S+\frac{2}{3}} = 2^{2\log_2 3} = 2^{\log_2 9} = 9$

【 참고 】
$k = -2^{a+1}+a+1+\sqrt{3}$일 때의 네 점 M, M′, C, C′의 관계를 나타내면 그림과 같다.



[미적분]

23	①	**24**	⑤	**25**	③	**26**	④	**27**	②
28	⑤	**29**	17	**30**	31				

23. [출제의도] 이계도함수 계산하기

$f'(x) = \frac{4}{x}$, $f''(x) = -\frac{4}{x^2}$
$f''(2) = -\frac{4}{2^2} = -1$

24. [출제의도] 급수의 뜻 이해하기

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3^{n+1}}{a_n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{3^n}+3}{\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}}=\frac{0+3}{0+\frac{1}{3}}=9$$

25. [출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기

직선 OP의 기울기는 $\frac{\sin 2t}{t}$ 이고

두 직선 OP, PQ가 서로 수직이므로

직선 PQ의 방정식은 $y=-\frac{t}{\sin 2t}(x-t)+\sin 2t$

그러므로 점 Q의 x좌표는 $\frac{\sin^2 2t}{t}+t$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{OQ}}{t}=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin^2 2t}{t^2}+1\right)$$
$$=4\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2+1$$
$$=4\times 1^2+1=5$$

26. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

조건 (가)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}-2n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{a_n}}{n}-2\right)=0$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}=2$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=4$

$f(x)$는 다항함수이므로

$a_n=4n^2+an+b$(a, b는 상수)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-2n)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n^2}{\sqrt{a_n}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{\sqrt{4n^2+an+b}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}}{\sqrt{4+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+2}$$
$$=\frac{a}{4}=2$$

에서 $a=8$

조건 (나)에 의하여 a_n+1이 완전제곱식이어야 하므로

$a_n+1=4n^2+8n+b+1=(2n+2)^2+b-3$에서

$b=3$

그러므로 $a_n=4n^2+8n+3$

따라서 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$

27. [출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 문제해결하기

$\frac{dx}{dt}=2e^t+3e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=2e^t-6e^{-t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^t-6e^{-t}}{2e^t+3e^{-t}}$$

$t=t_1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 $-\frac{1}{5}$이므로

$\frac{2e^{t_1}-6e^{-t_1}}{2e^{t_1}+3e^{-t_1}}=-\frac{1}{5}$에서 $12e^{t_1}=27e^{-t_1}$, $\left(e^{t_1}\right)^2=\frac{9}{4}$

$e^{t_1}>0$이므로 $e^{t_1}=\frac{3}{2}$

t_1은 방정식 $2e^t+6e^{-t}=k$의 한 근이므로

$2e^{t_1}+6e^{-t_1}=2\times\frac{3}{2}+6\times\frac{2}{3}=7$에서 $k=7$

방정식 $2e^t+6e^{-t}=7$에서

$2(e^t)^2-7e^t+6=(2e^t-3)(e^t-2)=0$이므로

$e^{t_2}=2$

$t=t_2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{2e^{t_2}-6e^{-t_2}}{2e^{t_2}+3e^{-t_2}}=\frac{2\times 2-6\times\frac{1}{2}}{2\times 2+3\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{11}$$ 이므로 $m=\frac{2}{11}$

따라서 $k+m=7+\frac{2}{11}=\frac{79}{11}$

28. [출제의도] 등비급수를 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$b_n=a_n$ 또는 $b_n=|a_n|$

$a_1=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=b_n=0$

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})=0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a_1>0$이면 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1}>0$이므로 $b_{2n-1}=a_{2n-1}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})=\sum_{n=2}^{\infty}2a_{2n+1}$$
$$=\frac{2a_5}{1-\frac{1}{4}}=\frac{a_1}{6}>0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_1<0$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}>0$이므로 $b_{2n}=a_{2n}$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}<0$이므로

$a_{2n-1}+b_{2n-1}=2a_{2n-1}$ 또는 $a_{2n-1}+b_{2n-1}=0$에서

$a_{2n-1}+b_{2n-1}\le 0$

$\sum_{n=2}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})=0$이므로

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1}+b_{2n+1}=0$, $b_{2n+1}=-a_{2n+1}$

조건 (나)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})$$
$$=a_3+b_3+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})=a_3+b_3\neq 0$$

이므로 $b_3=a_3$

$b_1-b_3=3a_3+5$에서 $b_1=4a_3+5=a_1+5$

이때 $b_1=a_1$이면 $b_1\neq a_1+5$이므로

$b_1=-a_1$이고 $a_1=-\frac{5}{2}$

그러므로 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\quad b_n=\begin{cases}|a_n| & (n\neq 3)\\ a_3 & (n=3)\end{cases}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|-|a_3|+a_3$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+2a_3$$
$$=\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$$

29. [출제의도] 삼각함수의 미분을 활용하여 문제해결하기

선분 AB가 반원의 지름이므로 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이고

점 M이 선분 AP의 중점이므로

$\overline{MP}=\frac{1}{2}\times\overline{AP}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\cos\theta=\cos\theta$

반원의 중심을 O라 하면

삼각형 OPQ는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고,

삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로

$\angle QPA=\angle QPO-\angle APO=\frac{\pi}{3}-\theta$

삼각형 PQM의 넓이 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PM}\times\sin(\angle QPA)$$
$$=\frac{1}{2}\times 1\times\cos\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cos\theta\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta\right)$$
$$=\frac{1}{4}(\sqrt{3}\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta)$$

$$f'(\theta)=\frac{1}{4}\{\sqrt{3}\times 2\cos\theta(-\sin\theta)$$
$$-(-\sin\theta)\sin\theta-\cos\theta\cos\theta\}$$
$$=\frac{1}{4}(-2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta)$$

$\overline{AP}=2\cos a=\frac{6}{5}$에서 $\cos a=\frac{3}{5}$, $\sin a=\frac{4}{5}$이므로

$$f'(a)=\frac{1}{4}(-2\sqrt{3}\cos a\sin a+\sin^2 a-\cos^2 a)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{-2\sqrt{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{7}{100}-\frac{6}{25}\sqrt{3}$$

에서 $p=\frac{7}{100}$, $q=-\frac{6}{25}$

따라서 $100\times|p+q|=100\times\left|\frac{7}{100}-\frac{6}{25}\right|=17$

30. [출제의도] 여러 가지 미분법을 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 함수 $h(x)-|g(x)|$는

$x=k$에서 연속이다.

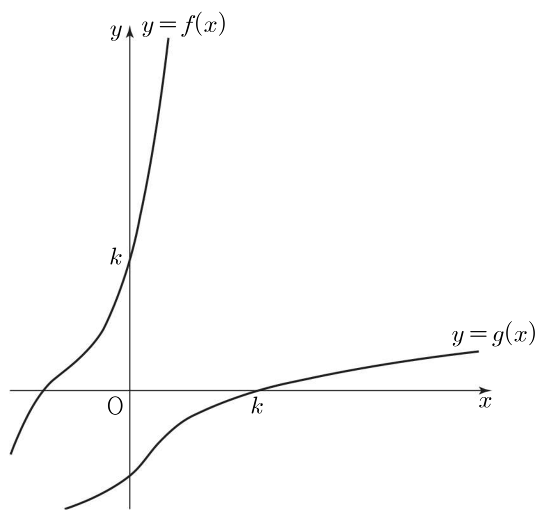
삼차함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $|g(x)|$는 $x=k$에서 연속이다. 그러므로 함수 $h(x)$는 $x=k$에서 연속이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

역함수 $g(x)$를 가지므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$ … ㉠

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$x>0$일 때 $f(x)>k$이므로 $x>k$일 때 $g(x)>0$

$\lim_{x\to k+} h(x) = \lim_{x\to k+} \frac{x\ln(1+3|g(x)|)}{g(x)}$

$= \lim_{x\to k+}\left(3x \times \frac{\ln(1+3g(x))}{3g(x)}\right) = 3k$

$x<0$일 때 $f(x)<k$이므로 $x<k$일 때 $g(x)<0$

$\lim_{x\to k-} h(x) = \lim_{x\to k-} \frac{x\ln(1+3|g(x)|)}{g(x)}$

$= \lim_{x\to k-}\left(-3x \times \frac{\ln(1-3g(x))}{-3g(x)}\right) = -3k$

$\lim_{x\to k+} h(x) = \lim_{x\to k-} h(x) = h(k)$이므로 $3k=-3k$에서

$k=0,\ h(0)=0$

그러므로 $f(0)=g(0)=0$

함수 $h(x)-|g(x)|$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0+} \frac{(h(x)-|g(x)|)-(h(0)-|g(0)|)}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0+} \frac{h(x)-g(x)}{x}$

$= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\ln(1+3g(x))}{g(x)} - \frac{g(x)}{x}\right)$ ⋯ ㉡

의 값이 존재하고

$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+3g(x))}{g(x)} = 3$이므로

$\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)}{x}$의 값이 존재한다.

또한

$\lim_{x\to 0-} \frac{(h(x)-|g(x)|)-(h(0)-|g(0)|)}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0-} \frac{h(x)+g(x)}{x}$

$= \lim_{x\to 0-}\left(\frac{\ln(1-3g(x))}{g(x)} + \frac{g(x)}{x}\right)$ ⋯ ㉢

의 값이 존재하고

$\lim_{x\to 0-} \frac{\ln(1-3g(x))}{g(x)} = -3$이므로

$\lim_{x\to 0-} \frac{g(x)}{x}$의 값이 존재한다.

이때 $f'(0)=0$이면 $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \infty$가 되어

$\lim_{x\to 0+} \frac{g(x)}{x},\ \lim_{x\to 0-} \frac{g(x)}{x}$의 값이 존재할 수 없다.

그러므로 $f'(0) \neq 0$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

㉡, ㉢에 의하여

$3-g'(0) = -3+g'(0),\ g'(0)=3$

$g'(0) = \frac{1}{f'(0)}$에서 $f'(0) = \frac{1}{3}$

$f(x) = x^3+ax^2+bx$($a,\ b$는 상수)라 하면

$f'(x) = 3x^2+2ax+b$이므로 $f'(0)=b=\frac{1}{3}$

이때 $f'(1)=0$이면 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $f'(1)\neq 0$

$f(1) = a+\frac{4}{3},\ g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{3}{6a+10}$이므로

조건 (나)에 의하여

$4\times\frac{3}{6a+10} = 3\times\left(a+\frac{4}{3}\right)-4$

$3a^2+5a-2=0$에서 $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

㉠에 의하여

이차방정식 $f'(x)=3x^2+2ax+\frac{1}{3}=0$의 판별식을

D라 하면

$D=(2a)^2-4\times3\times\frac{1}{3}=4(a^2-1)\le 0$

$-1\le a\le 1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

그러므로 $f(x)=x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

따라서 $f(3)=31$