2026학년도 5월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	⑤	**3**	③	**4**	⑤	**5**	①
6	①	**7**	⑤	**8**	③	**9**	①	**10**	②
11	④	**12**	②	**13**	②	**14**	③	**15**	⑤
16	24	**17**	140	**18**	8	**19**	10	**20**	155
21	55	**22**	9						

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$2^{\frac{1}{3}}\times\sqrt[3]{32}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}=4$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$y'=3x^2+2$이므로

곡선 $y=x^3+2x-1$ 위의 점 $(1,\,2)$에서의

접선의 기울기는 $3\times1^2+2=5$

3. [출제의도] 부정적분 이해하기

함수 $f(x)$는 $\dfrac{d}{dx}f(x)$의 한 부정적분이고

$\displaystyle\int\frac{d}{dx}f(x)dx=\int(3x^2-5)dx=x^3-5x+C$

(C는 적분상수)

이므로 $f(x)=x^3-5x+c$ (c는 상수)

$f(0)=1$에서 $c=1$

따라서 $f(x)=x^3-5x+1$이므로 $f(1)=-3$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=3+2=5$

5. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프 이해하기

곡선 $y=2^{x-a}+b$의 점근선이 직선 $y=-4$이므로

$b=-4$

곡선 $y=2^{x-a}-4$가 원점을 지나므로

$2^{-a}-4=0$에서 $a=-2$

따라서 $a+b=-6$

6. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각

$a+1,\ -a+1$이므로

$(a+1)-(-a+1)=2a=6$에서 $a=3$

함수 $f(x)$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{b}$이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=3\pi$에서 $b=\dfrac{2}{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{11}{3}$

7. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$의 양변을

x에 대하여 미분하면 $f(x)=2x-3a$

$f(0)=-3a>0$에서 $a<0$

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2-3a^2+2$에서 $a^2=1$

$a=-1$이므로 $f(x)=2x+3$

따라서 $f(2)=7$

8. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

a_3이 a_1과 a_5의 등비중항이므로 $a_3^2=36$

수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r\neq0)$이라 하면

$a_3=a_1r^2<0$이므로 $a_3=-6$

$a_3+2a_4=a_3+2a_3r=-6-12r$

$a_3+2a_4=2$이므로 $r=-\dfrac{2}{3}$

$a_3=a_2r$에서 $-6=a_2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

따라서 $a_2=(-6)\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=9$

9. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-4}{h}=9$이고 $\displaystyle\lim_{h\to0}h=0$이므로

$\displaystyle\lim_{h\to0}(g(1+h)-4)=0$

함수 $g(x)=(x^2+x)f(x)$가 다항함수이므로

$\displaystyle\lim_{h\to0}(g(1+h)-4)=g(1)-4=0$에서

$g(1)=2f(1)=4,\ f(1)=2$

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=g'(1)$이므로

$g'(1)=9$

또한 $g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x)f'(x)$에서

$g'(1)=3f(1)+2f'(1)=6+2f'(1)$이므로

$f'(1)=\dfrac{3}{2}$

따라서 $f(1)\times f'(1)=2\times\dfrac{3}{2}=3$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\dfrac{1}{2}\times4\times15\times\sin A=24$

에서 $\sin A=\dfrac{4}{5}$

각 A가 예각이므로 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{3}{5}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$

$=4^2+15^2-2\times4\times15\times\dfrac{3}{5}=169$

에서 $\overline{BC}=13$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$2R=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{13}{\frac{4}{5}}=\dfrac{65}{4}$

따라서 $R=\dfrac{65}{8}$

11. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

(ⅰ) $a_1<0$일 때

$a_2=-2a_1>0$이므로 $a_3=a_2-3=-2a_1-3$

조건 (나)에 의하여 $-2a_1-3=a_1+4$

$a_1=-\dfrac{7}{3}$

(ⅱ) $a_1\ge0$일 때

$a_2=a_1-3$

(a) $a_2\ge0$일 때

$a_3=a_2-3=a_1-6$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(b) $a_2<0$일 때

$a_2=a_1-3<0$이므로 $a_1<3$

$a_3=-2a_2=-2(a_1-3)$

조건 (나)에 의하여 $-2(a_1-3)=a_1+4$

$a_1=\dfrac{2}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는

모든 수열 $\{a_n\}$의 a_1의 값의 합은 $\left(-\dfrac{7}{3}\right)+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{5}{3}$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

ㄱ. $v(t)=3t^2-11t+8=(3t-8)(t-1)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=\dfrac{8}{3}$

$0\le t<1$에서 $v(t)>0$,

$1<t<\dfrac{8}{3}$에서 $v(t)<0$이므로

시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=\dfrac{d}{dt}v(t)=6t-11$

$a(t)=1$에서 $t=2$

그러므로 점 P의 가속도가 1이 되는 순간의 시각 t는 2이다.

시각 $t=0$일 때 원점을 출발하므로

점 P의 가속도가 1인 순간 점 P의 위치는

$\displaystyle 0+\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(3t^2-11t+8)dt$

$\displaystyle=\left[t^3-\frac{11}{2}t^2+8t\right]_0^2$

$=2-0=2$ (참)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^2|v(t)|dt$

$\displaystyle=\int_0^2|3t^2-11t+8|dt$

$\displaystyle=\int_0^1(3t^2-11t+8)dt+\int_1^2(-3t^2+11t-8)dt$

$\displaystyle=\left[t^3-\frac{11}{2}t^2+8t\right]_0^1+\left[-t^3+\frac{11}{2}t^2-8t\right]_1^2$

$=\left(\dfrac{7}{2}-0\right)+\left\{-2-\left(-\dfrac{7}{2}\right)\right\}=5$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

13. [출제의도] 평균변화율을 활용하여 문제해결하기

조건 (가)에서

$0<x\le12$일 때 $f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}$ ⋯ ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\displaystyle f(0)=\lim_{x\to0+}\frac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0+}\frac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{2x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0+}\frac{a(\sqrt{2x+1}+1)}{2}=a$

㉠에 의하여 $f(12)=\dfrac{12a}{\sqrt{2\times12+1}-1}=3a$

조건 (나)에서 모든 실수 k에 대하여

$\dfrac{f(k+12)-f(k)}{(k+12)-k}=\dfrac{1}{2}$

$f(k+12)=f(k)+6$ ⋯ ㉡

㉡의 양변에 $k=0$을 대입하면

$f(12)=f(0)+6,\ 3a=a+6$에서 $a=3$

㉠에 의하여 $f(4)=\dfrac{12}{\sqrt{2\times4+1}-1}=6$

따라서 ㉡에 의하여

$f(28)=f(16)+6=(f(4)+6)+6=18$

14. [출제의도] 삼각함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

점 A의 x좌표를 $a\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자.

곡선 $y=\sin x$가 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

점 B의 x좌표는 $\pi-a$

$\sin a=k$에서

$-\sqrt{1-k^2}=-\sqrt{1-\sin^2 a}=-\cos a$이고

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm a\right)=-\cos a$이며,

곡선 $y=\sin x\,(0\le x\le 2\pi)$와

직선 $y=-\sqrt{1-k^2}$의 교점은 C, D뿐이므로

두 점 C, D의 x좌표는 각각 $\frac{3}{2}\pi-a$, $\frac{3}{2}\pi+a$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=(\pi-a)-a=\pi-2a$

$\overline{\mathrm{CD}}=\left(\frac{3}{2}\pi+a\right)-\left(\frac{3}{2}\pi-a\right)=2a$

$\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{AB}}=2a-(\pi-2a)=4a-\pi=\frac{2}{9}\pi$에서

$a=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{9}\pi+\pi\right)=\frac{11}{36}\pi$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\pi-2\times\frac{11}{36}\pi=\frac{7}{18}\pi$

15. [출제의도] 정적분 이해하기

함수 $y=-f(x)$의 그래프에 접하는 직선 중

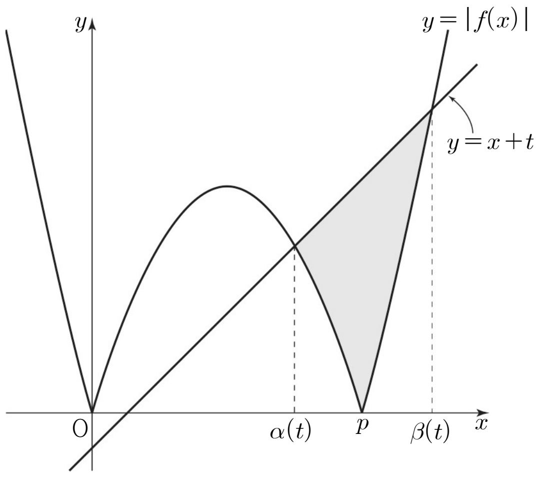
기울기가 1인 직선의 y절편을 t_1이라 하자.

$-p<t<0$ 또는 $t\ge t_1$일 때

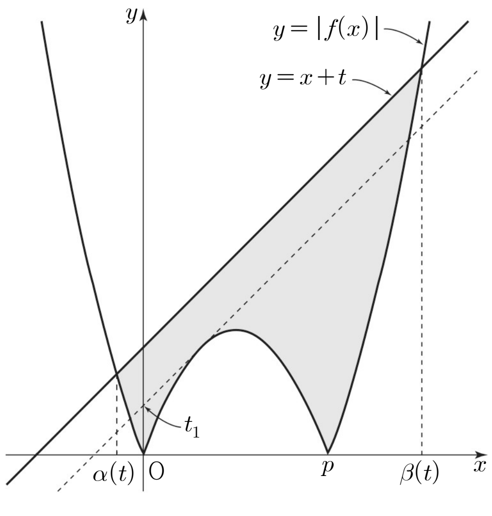
[그림 1], [그림 2]와 같이 $\alpha(t)\le x\le \beta(t)$인

모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le x+t$이므로

$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\{|f(x)|-(x+t)\}dx\le 0$



[그림 1]



[그림 2]

그러므로 함수 $g(t)$는 $0\le t<t_1$에서 최댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

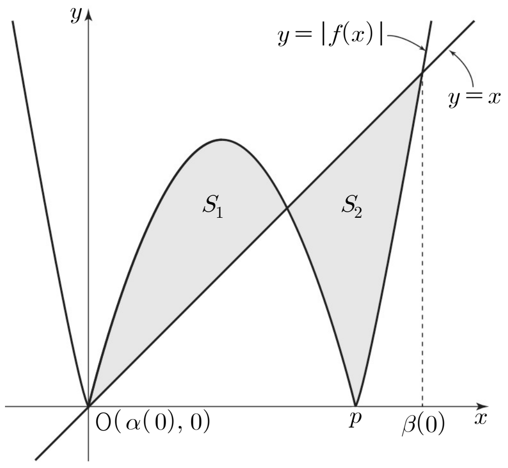
$t=0$일 때의 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와

직선 $y=x+t$의 개형은 [그림 3]과 같고,

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x$로

둘러싸인 2개 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$g(0)=S_1-S_2$



[그림 3]

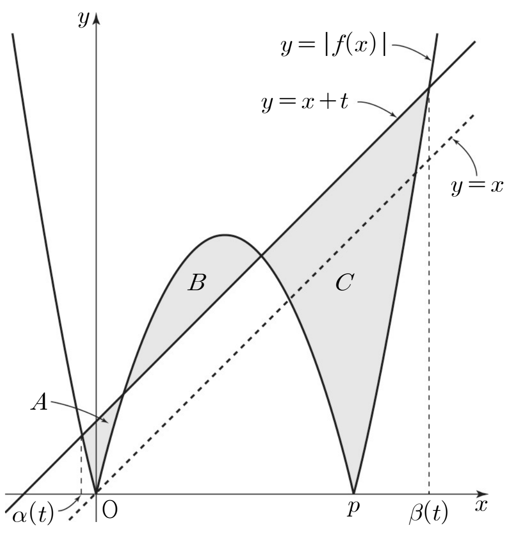
$0<t<t_1$일 때의 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와

직선 $y=x+t$의 개형은 [그림 4]와 같고,

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x+t$로

둘러싸인 3개 영역의 넓이를 각각 A, B, C라 하면

$g(t)=-A+B-C$



[그림 4]

$0<t<t_1$인 모든 실수 t에 대하여

$B<S_1$, $C>S_2$이므로

$-A+B-C<B-C<S_1-S_2$

그러므로 $0\le t<t_1$인 모든 실수 t에 대하여

$g(t)\le g(0)$이며 $g(0)=\frac{1}{2}$

방정식 $|f(x)|=x$의 해가 0, $p-1$, $p+1$이므로

$\alpha(0)=0$, $\beta(0)=p+1$

$g(0)=\int_{\alpha(0)}^{\beta(0)}(|f(x)|-x)dx$

$=\int_0^{p+1}|f(x)|dx-\int_0^{p+1}x\,dx$

$=\int_0^{p}(-f(x))dx+\int_p^{p+1}f(x)dx-\int_0^{p+1}x\,dx$

$=\int_0^{p}(-x^2+px)dx$

$+\int_p^{p+1}(x^2-px)dx-\frac{(p+1)^2}{2}$

$=\frac{p^3-3p^2-3p-1}{6}=\frac{1}{2}$

$p^3-3p^2-3p-4=(p-4)(p^2+p+1)=0$

따라서 $p=4$

16. [출제의도] 호도법 이해하기

부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 8^2\times\frac{3}{4}\pi=24\pi$이므로 $a=24$

17. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}(k^2-a_{2k-1})=\sum_{k=1}^{7}k^2-\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}$에서

$\sum_{k=1}^{7}k^2=\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{7}a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{7}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{14}a_k$

따라서 $\sum_{k=1}^{14}a_k=\frac{7\times 8\times 15}{6}=140$

18. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$x-4$, $x-6$은 로그의 진수이므로

$x-4>0$, $x-6>0$에서 $x>6$

방정식 $\log_2(x-4)=\log_{\frac{1}{2}}(x-6)+3$에서

$\log_2(x-4)=-\log_2(x-6)+3$

$\log_2(x-4)(x-6)=3$

$(x-4)(x-6)=2^3$

$x^2-10x+16=(x-2)(x-8)=0$

따라서 $x>6$이므로 $x=8$

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=x^3-3ax^2+40a^2$이라 하자.

x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 1이려면 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수가 1이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2a\,(a>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(0)=40a^2>0$이므로 $f(2a)=0$이어야 한다.

$f(2a)=8a^3-12a^3+40a^2=-4a^2(a-10)=0$

따라서 $a=10$

20. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

조건 (나)에서 $b_3+b_5\ne 2b_4$이므로

세 수 b_3, b_4, b_5는 이 순서대로 등차수열을

이루지 않는다. $\cdots$ ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$d\ge 0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이 되어

$b_n=a_n$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $d<0$이며 $a_3>a_4>a_5$이다.

(ⅰ) $a_3>a_4>a_5>0$일 때

$b_3=a_3$, $b_4=a_4$, $b_5=a_5$이므로

㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_3>a_4>0\ge a_5$일 때

$a_6=a_5+d<0$이므로 $b_6=-2a_6$

$(b_4+b_6)-2b_5=(a_4-2a_6)-2(-2a_5)$

$=(8+3d)-2(8+5d)+4(8+4d)$
$=24+9d$
$=3a_4>0$

$b_4+b_6\neq 2b_5$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a_3>0\geq a_4>a_5$일 때

$a_3=8+2d>0$에서 $d>-4$이고

$a_4=8+3d\leq 0$에서 $d\leq -\frac{8}{3}$이므로

$-4<d\leq -\frac{8}{3}$

$a_6=a_5+d<0$이므로 $b_6=-2a_6$

$b_4=-2a_4$, $b_5=-2a_5$, $b_6=-2a_6$이므로

$b_4+b_6=2b_5$가 성립한다.

$b_3+b_5=2b_4+6$에서

$a_3+(-2a_5)=2\times(-2a_4)+6$

$(8+2d)-2\times(8+4d)=-4\times(8+3d)+6$

$-8-6d=-26-12d$, $d=-3$

(iv) $0\geq a_3>a_4>a_5$일 때

$b_3=-2a_3$, $b_4=-2a_4$, $b_5=-2a_5$이므로

㉠을 만족시키지 않는다.

(i) ~ (iv)에 의하여 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 -3이므로 $a_n=8-3(n-1)=-3n+11$이고

$$b_n=\begin{cases} a_n & (n\leq 3) \\ -2a_n & (n\geq 4)\end{cases}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{3}a_k-2\sum_{k=4}^{10}a_k$

$=(8+5+2)-2\times\frac{7(a_4+a_{10})}{2}$

$=15-7(-1-19)=155$

21. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=p$에서 연속이다.

$\lim_{x\to p-}g(x)=\lim_{x\to p-}f(x)=f(p)$이고

$g(p)=kf(0)=0$이므로 $f(p)=0$

$f(x)=x(x-p)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$$g(x)=\begin{cases} x(x-p)(x-a) & (x<p) \\ k(x-p)(x-2p)\{x-(a+p)\} & (x\geq p)\end{cases}$$

$p>0$이므로 0, p, $2p$는 방정식 $g(x)=0$의 실근이다.

$a=p$ 또는 $a=0$이면 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근이 0, p, $2p$뿐이므로

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $3p$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i) $a>p$일 때

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근은

0, p, $2p$, $a+p$

$0+p+2p+(a+p)\neq 2p$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<p$일 때

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근은

0, a, p, $a+p$, $2p$

$0+a+p+(a+p)+2p\neq 2p$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a<0$일 때

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은

$a+0+p+2p=a+3p$

조건 (나)에 의하여 $a+3p=2p$에서 $a=-p$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$a=-p$이며 $f(x)=x(x+p)(x-p)$

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(p+h)-g(p)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(p+h)h(2p+h)}{h}=2p^2,$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(p+h)-g(p)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{kh(-p+h)(p+h)}{h}$$
$$=-kp^2$$

에서 $2p^2=-kp^2$, $k=-2$

그러므로 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<p) \\ -2f(x-p) & (x\geq p)\end{cases}$

$f'(x)=3x^2-p^2=0$에서

$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}p$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}p$

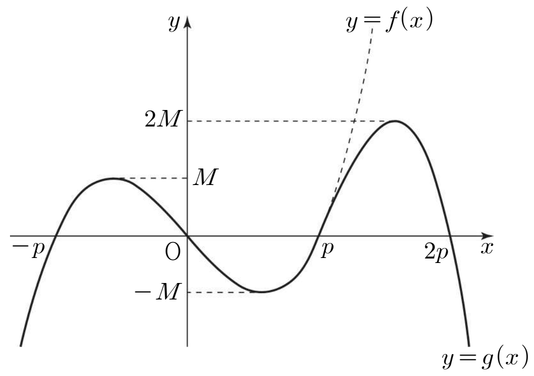
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}p$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}p$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}p^3$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}p^3$	↗

함수 $f(x)$의 극댓값을 M이라 하면

함수 $f(x)$의 극솟값은 $-M$이다.

$k=-2$이므로 함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값은 $2M$이며 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

$2M=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$2\times\frac{2\sqrt{3}}{9}p^3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$에서 $p=\frac{3}{2}$

그러므로 $f(x)=x^3-\frac{9}{4}x$

따라서 $f(4)=4^3-\frac{9}{4}\times 4=55$

22. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 추론하기

두 점 A, B 중에서 x좌표가 작은 점을 A라 하고,

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(a,\ 2^{a+1}+k)$ (a는 실수)라 하자.

직선 AB의 기울기가 1이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이므로

$\mathrm{B}(a+2,\ 2^{a+1}+k+2)$

점 B가 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 점이므로

$2^{a+1}+k+2=2^{(a+2)+1}+k$

$(2^3-2)\times 2^a=2$에서

$2^a=\frac{1}{3}$, $a=-\log_2 3$ $\cdots$ ㉠

이제 선분 AB의 중점을 M이라 하자.

점 M의 좌표가 $\mathrm{M}(a+1,\ 2^{a+1}+k+1)$이므로

점 M은 곡선 $y=2^x+k+1$ 위의 점이다.

점 M을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨

점 $\mathrm{M}'(a+1,\ 2^{a+1}+k)$는 곡선 $y=2^x+k$ 위에 있고,

점 C는 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위에 있으므로

점 C를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨

점 C′은 곡선 $y=\log_2(x-k)$ 위에 있다.

직선 CM의 기울기가 -1이므로

직선 C′M′의 기울기도 -1이고,

두 곡선 $y=2^x+k$, $y=\log_2(x-k)$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 C′은 점 M′을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

점 C′의 좌표는 $\mathrm{C}'(2^{a+1}+k,\ a+1)$이므로

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(2^{a+1}+k,\ a+2)$이다.

삼각형 ABC가 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인

정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{6}$이고,

직선 CM의 기울기가 -1이므로

점 C의 x좌표와 점 M의 x좌표의 차는 $\sqrt{3}$이다.

$|(2^{a+1}+k)-(a+1)|=\sqrt{3}$

$k=-2^{a+1}+a+1+\sqrt{3}$

또는 $k=-2^{a+1}+a+1-\sqrt{3}$

그러므로 $S=-2\times 2^{a+1}+2a+2$

㉠에 의하여

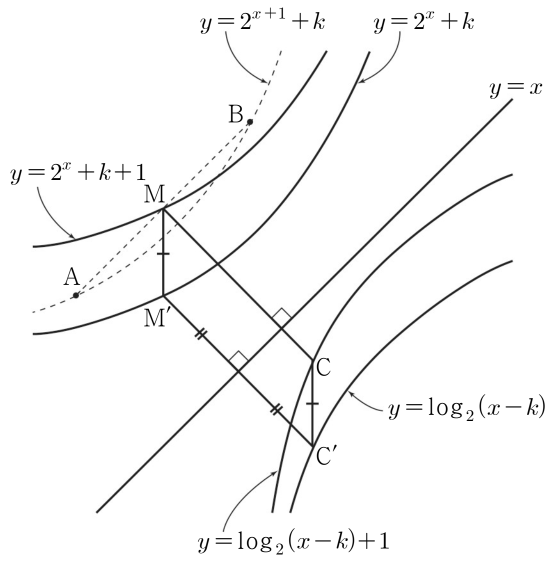
$S=-2\times\frac{2}{3}+2\times(-\log_2 3)+2$

$=\frac{2}{3}-2\log_2 3$

따라서 $2^{-S+\frac{2}{3}}=2^{2\log_2 3}=2^{\log_2 9}=9$

【 참고 】

$k=-2^{a+1}+a+1+\sqrt{3}$일 때의 네 점 M, M′, C, C′의 관계를 나타내면 그림과 같다.



[확률과 통계]

23	③	**24**	④	**25**	①	**26**	⑤	**27**	②
28	①	**29**	68	**30**	398				

23. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 계산하기

a, a, a, b, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times 3!}=140$

24. [출제의도] 확률의 덧셈정리 이해하기

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}-\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

25. [출제의도] 이항정리 이해하기

$(2x^2+1)^4\left(x-\frac{1}{2x}\right)$의 전개식에서 x^5의 계수는

다항식 $(2x^2+1)^4$의 전개식에서 x^4, x^6의 계수에

각각 1, $-\frac{1}{2}$을 곱한 값의 합이다.

$(2x^2+1)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r(2x^2)^r={}_4\mathrm{C}_r2^rx^{2r}$이므로 구하는 값은

${}_4\mathrm{C}_2\times2^2\times1+{}_4\mathrm{C}_3\times2^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=24-16=8$

26. [출제의도] 중복순열 이해하기

조건 (가)에 의하여

$a_1=1$, $a_5=5$ 또는 $a_1=2$, $a_5=6$이다.

(i) $a_1=1$, $a_5=5$인 경우
조건 (나)를 만족시키려면
a_2, a_3, a_4 중 적어도 하나는 짝수이어야 하므로
a_2, a_3, a_4의 값을 정하는 경우의 수는
1, 2, 3, 4, 5 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수에서 1, 3, 5 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수를 뺀 것과 같다.
그러므로 구하는 경우의 수는
${}_5\Pi_3-{}_3\Pi_3=5^3-3^3=98$

(ii) $a_1=2$, $a_5=6$인 경우
a_1과 a_5가 짝수이므로 조건 (나)를 만족시킨다.
a_2, a_3, a_4의 값을 정하는 경우의 수는
2, 3, 4, 5, 6 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$의 개수는 $98+125=223$

27. [출제의도] 중복조합을 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
이때 조건 (나)에 의하여 1과 3은 적어도 하나씩 택해야 하므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

28. [출제의도] 확률의 뜻을 이용하여 추론하기

X에서 X로의 모든 일대일대응 f의 개수는 $5!=120$
조건 (가)에 의하여 $f(3)\neq1$, $f(4)\neq1$
또한 $f(5)=1$이면 $2\le f(1)\le5$에서
$1\le f(1)-f(5)\le4$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
그러므로 가능한 $f^{-1}(1)$의 값은 1, 2이다.

(i) $f^{-1}(1)=1$인 경우
$f(1)=1$이므로 $f(3)$, $f(5)$의 값에 관계없이
$f(1)<f(3)$과 $|f(1)-f(5)|\ge1$을 만족시킨다.
$f(2)<f(4)$를 만족시키는 일대일대응 f의 개수는 $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{P}_2=12$

(ii) $f^{-1}(1)=2$인 경우
$f(2)=1$이므로 $f(4)$의 값에 관계없이
$f(2)<f(4)$를 만족시킨다.
(a) $f(3)<f(5)$인 경우
$f(1)<f(3)<f(5)$이므로 $f(5)$의 값에 관계없이 $|f(1)-f(5)|\ge2$를 만족시킨다.
$f(1)<f(3)<f(5)$를 만족시키는 일대일대응 f의 개수는 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{C}_1=4$
(b) $f(5)<f(3)$인 경우
$|f(1)-f(5)|\ge2$인 경우는
$f(1)=2$, $f(4)=3$, $f(5)=4$, $f(3)=5$ 또는
$f(5)=2$, $f(4)=3$, $f(1)=4$, $f(3)=5$뿐이므로
일대일대응 f의 개수는 2
그러므로 구하는 경우의 수는 $4+2=6$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은 $\frac{12+6}{120}=\frac{3}{20}$

29. [출제의도] 원순열을 활용하여 문제해결하기

조건 (가)에 의하여 6이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자에 적힌 수는 2, 7이거나 4, 5이다.

(i) 6이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자에 적힌 수가 2, 7인 경우
2, 7이 적힌 의자 모두 6이 적힌 의자와 이웃하는 경우의 수는 $2!=2$
조건 (나)에 의하여 3, 4가 적힌 의자는 모두 7이 적힌 의자와 이웃하지 않아야 하므로
1 또는 5가 적힌 의자 중 하나가 7이 적힌 의자와 이웃해야 한다.
1 또는 5가 적힌 의자 중 하나가 7이 적힌 의자와 이웃하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$
1, 2, 6, 7 또는 2, 5, 6, 7이 적힌 4개의 의자를 하나의 의자로 생각하여 4개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{4}=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $2\times2\times6=24$

(ii) 6이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자에 적힌 수가 4, 5인 경우
4, 5가 적힌 의자 모두 6이 적힌 의자와 이웃하는 경우의 수는 $2!=2$
7이 적힌 의자와 6이 적힌 의자는 이웃하지 않으므로 조건 (나)에 의하여 2, 4가 적힌 의자 중 적어도 하나는 7이 적힌 의자와 이웃하지 않아야 한다.
그러므로 구하는 경우의 수는 조건 (가)를 만족시키도록 7개의 의자를 원형으로 배열하는 경우에서 2, 4가 적힌 의자 모두 7이 적힌 의자와 이웃하는 경우를 제외한 경우의 수이다.
(a) 조건 (가)를 만족시키는 경우
4, 5, 6이 적힌 3개의 의자를 하나의 의자로 생각하여 5개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{5}=24$
(b) 조건 (가)를 만족시키면서 2, 4가 적힌 의자 모두 7이 적힌 의자와 이웃하는 경우
4가 적힌 의자와 6이 적힌 의자가 이웃하므로 2, 4, 5, 6, 7이 적힌 5개의 의자를 하나의 의자로 생각하여 3개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{3}=2$
그러므로 구하는 경우의 수는 $2\times(24-2)=44$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$24+44=68$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

조건 (가)에 의하여 2, 4가 적힌 상자 중 적어도 하나의 상자에는 카드를 넣을 수 없다.
이때 조건 (나)에 의하여 2, 4가 적힌 상자에 넣는 공의 개수의 합은 2 이상이어야 하므로 공 8개 모두를 8이 적힌 상자에 넣을 수 없다.
그러므로 8이 적힌 카드는 8이 적힌 상자에 넣어야 한다.

(i) 2가 적힌 상자에 2의 배수가 적힌 카드를 넣는 경우
2가 적힌 상자에 2 또는 4가 적힌 카드를 넣고 1, 8이 적힌 상자에 남은 두 장의 카드를 하나씩 넣는 경우의 수는 $2\times2!=4$
4가 적힌 상자에 4개의 공을 넣고 남은 4개의 공을 4개의 상자에 넣는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$
그러므로 구하는 경우의 수는 $4\times35=140$

(ii) 4가 적힌 상자에 4의 배수가 적힌 카드를 넣는 경우
4가 적힌 상자에 4가 적힌 카드를 넣고 1, 8이 적힌 상자에 남은 두 장의 카드를 하나씩 넣는 경우의 수는 $2!=2$
2가 적힌 상자에 2개의 공을 넣고 남은 6개의 공을 4개의 상자에 넣는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6=84$
그러므로 구하는 경우의 수는 $2\times84=168$

(iii) 2가 적힌 상자에 2의 배수가 적힌 카드를 넣지 않고, 4가 적힌 상자에 4의 배수가 적힌 카드를 넣지 않는 경우
2, 4가 적힌 상자에 각각 2개, 4개의 공을 넣고 남은 2개의 공을 4개의 상자에 넣는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$
(a) 8이 적힌 상자에 2장의 카드를 넣는 경우
2가 적힌 상자에 1이 적힌 카드를 넣고 1, 8이 적힌 상자에 남은 두 장의 카드를 하나씩 넣는 경우의 수는 $2!=2$
4가 적힌 상자에 1 또는 2가 적힌 카드를 넣고 1, 8이 적힌 상자에 남은 두 장의 카드를 하나씩 넣는 경우의 수는 $2\times2!=4$
그러므로 구하는 경우의 수는 $2+4=6$
(b) 8이 적힌 상자에 3장의 카드를 넣는 경우
1이 적힌 상자에 1 또는 2 또는 4가 적힌 카드를 넣는 경우의 수는 3
그러므로 구하는 경우의 수는 $10\times(6+3)=90$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$140+168+90=398$

[미적분]

23	①	**24**	⑤	**25**	③	**26**	④	**27**	②
28	⑤	**29**	17	**30**	31				

23. [출제의도] 이계도함수 계산하기

$f'(x)=\frac{4}{x}$, $f''(x)=-\frac{4}{x^2}$

$f''(2)=-\frac{4}{2^2}=-1$

24. [출제의도] 급수의 뜻 이해하기

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3^{n+1}}{a_n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{3^n}+3}{\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}}=\frac{0+3}{0+\frac{1}{3}}=9$$

25. [출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기

직선 OP의 기울기는 $\frac{\sin 2t}{t}$이고

두 직선 OP, PQ가 서로 수직이므로

직선 PQ의 방정식은 $y=-\frac{t}{\sin 2t}(x-t)+\sin 2t$

그러므로 점 Q의 x좌표는 $\frac{\sin^2 2t}{t}+t$

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{t}=\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin^2 2t}{t^2}+1\right)$$

$$=4\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2+1$$

$$=4\times1^2+1=5$$

26. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

조건 (가)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}-2n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{a_n}}{n}-2\right)=0$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}=2$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=4$

$f(x)$는 다항함수이므로

$a_n=4n^2+an+b$(a, b는 상수)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n^2}{\sqrt{a_n}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{\sqrt{4n^2+an+b}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}}{\sqrt{4+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+2}$$

$$=\frac{a}{4}=2$$

에서 $a=8$

조건 (나)에 의하여 a_n+1이 완전제곱식이어야 하므로

$a_n+1=4n^2+8n+b+1=(2n+2)^2+b-3$에서

$b=3$

그러므로 $a_n=4n^2+8n+3$

따라서 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$

27. [출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 문제해결하기

$\frac{dx}{dt}=2e^t+3e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=2e^t-6e^{-t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^t-6e^{-t}}{2e^t+3e^{-t}}$$

$t=t_1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 $-\frac{1}{5}$이므로

$\frac{2e^{t_1}-6e^{-t_1}}{2e^{t_1}+3e^{-t_1}}=-\frac{1}{5}$에서 $12e^{t_1}=27e^{-t_1}$, $\left(e^{t_1}\right)^2=\frac{9}{4}$

$e^{t_1}>0$이므로 $e^{t_1}=\frac{3}{2}$

t_1은 방정식 $2e^t+6e^{-t}=k$의 한 근이므로

$2e^{t_1}+6e^{-t_1}=2\times\frac{3}{2}+6\times\frac{2}{3}=7$에서 $k=7$

방정식 $2e^t+6e^{-t}=7$에서

$2\left(e^t\right)^2-7e^t+6=\left(2e^t-3\right)\left(e^t-2\right)=0$이므로

$e^{t_2}=2$

$t=t_2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{2e^{t_2}-6e^{-t_2}}{2e^{t_2}+3e^{-t_2}}=\frac{2\times2-6\times\frac{1}{2}}{2\times2+3\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{11}$이므로 $m=\frac{2}{11}$

따라서 $k+m=7+\frac{2}{11}=\frac{79}{11}$

28. [출제의도] 등비급수를 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$b_n=a_n$ 또는 $b_n=|a_n|$

$a_1=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=b_n=0$

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n+1}+b_{2n+1}\right)=0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a_1>0$이면 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1}>0$이므로 $b_{2n-1}=a_{2n-1}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_{2n+1}+b_{2n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}2a_{2n+1}$$

$$=\frac{2a_5}{1-\frac{1}{4}}=\frac{a_1}{6}>0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_1<0$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}>0$이므로 $b_{2n}=a_{2n}$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}<0$이므로

$a_{2n-1}+b_{2n-1}=2a_{2n-1}$ 또는 $a_{2n-1}+b_{2n-1}=0$에서

$a_{2n-1}+b_{2n-1}\le0$

$\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_{2n+1}+b_{2n+1}\right)=0$이므로

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1}+b_{2n+1}=0$, $b_{2n+1}=-a_{2n+1}$

조건 (나)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n+1}+b_{2n+1}\right)$$

$$=a_3+b_3+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_{2n+1}+b_{2n+1}\right)=a_3+b_3\ne0$$

이므로 $b_3=a_3$

$b_1-b_3=3a_3+5$에서 $b_1=4a_3+5=a_1+5$

이때 $b_1=a_1$이면 $b_1\ne a_1+5$이므로

$b_1=-a_1$이고 $a_1=-\frac{5}{2}$

그러므로 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\quad b_n=\begin{cases}|a_n| & (n\ne3)\\ a_3 & (n=3)\end{cases}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|-|a_3|+a_3$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+2a_3$$

$$=\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$$

29. [출제의도] 삼각함수의 미분을 활용하여 문제해결하기

선분 AB가 반원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이고

점 M이 선분 AP의 중점이므로

$\overline{\mathrm{MP}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\theta=\cos\theta$

반원의 중심을 O라 하면

삼각형 OPQ는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고,

삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{QPA}=\angle\mathrm{QPO}-\angle\mathrm{APO}=\frac{\pi}{3}-\theta$

삼각형 PQM의 넓이 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PM}}\times\sin(\angle\mathrm{QPA})$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\cos\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cos\theta\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta\right)$$

$$f'(\theta)=\frac{1}{4}\{\sqrt{3}\times2\cos\theta(-\sin\theta)$$
$$-(-\sin\theta)\sin\theta-\cos\theta\cos\theta\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(-2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)$$

$\overline{\mathrm{AP}}=2\cos a=\frac{6}{5}$에서 $\cos a=\frac{3}{5}$, $\sin a=\frac{4}{5}$이므로

$$f'(a)=\frac{1}{4}\left(-2\sqrt{3}\cos a\sin a+\sin^2 a-\cos^2 a\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{-2\sqrt{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{7}{100}-\frac{6}{25}\sqrt{3}$$

에서 $p=\frac{7}{100}$, $q=-\frac{6}{25}$

따라서 $100\times|p+q|=100\times\left|\frac{7}{100}-\frac{6}{25}\right|=17$

30. [출제의도] 여러 가지 미분법을 이용하여 추론하기

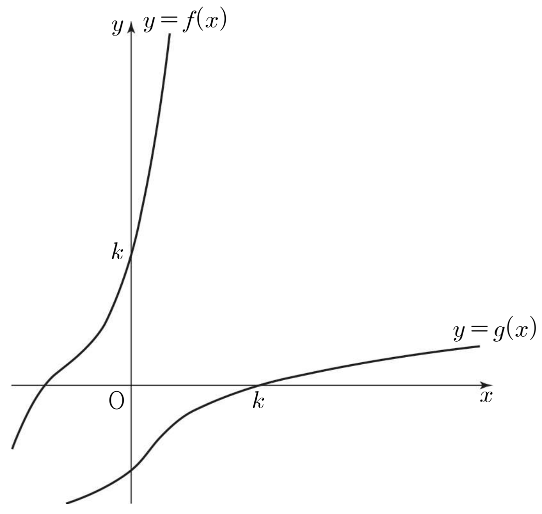
조건 (가)에 의하여 함수 $h(x)-|g(x)|$는 $x=k$에서 연속이다.

삼차함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $|g(x)|$는 $x=k$에서 연속이다. 그러므로 함수 $h(x)$는 $x=k$에서 연속이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 가지므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$ ⋯ ㉠

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$x>0$일 때 $f(x)>k$이므로 $x>k$일 때 $g(x)>0$

$$\lim_{x\to k+}h(x)=\lim_{x\to k+}\frac{x\ln(1+3|g(x)|)}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to k+}\left(3x\times\frac{\ln(1+3g(x))}{3g(x)}\right)=3k$$

$x<0$일 때 $f(x)<k$이므로 $x<k$일 때 $g(x)<0$

$$\lim_{x\to k-} h(x) = \lim_{x\to k-} \frac{x\ln(1+3|g(x)|)}{g(x)}$$
$$= \lim_{x\to k-}\left(-3x\times\frac{\ln(1-3g(x))}{-3g(x)}\right) = -3k$$

$\lim_{x\to k+} h(x) = \lim_{x\to k-} h(x) = h(k)$이므로 $3k=-3k$에서

$k=0$, $h(0)=0$

그러므로 $f(0)=g(0)=0$

함수 $h(x)-|g(x)|$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(h(x)-|g(x)|)-(h(0)-|g(0)|)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\ln(1+3g(x))}{g(x)}-\frac{g(x)}{x}\right) \cdots ㉡$$

의 값이 존재하고

$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+3g(x))}{g(x)}=3$이므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{x}$의 값이 존재한다.

또한

$$\lim_{x\to 0-}\frac{(h(x)-|g(x)|)-(h(0)-|g(0)|)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)+g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{\ln(1-3g(x))}{g(x)}+\frac{g(x)}{x}\right) \cdots ㉢$$

의 값이 존재하고

$\lim_{x\to 0-}\frac{\ln(1-3g(x))}{g(x)}=-3$이므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)}{x}$의 값이 존재한다.

이때 $f'(0)=0$이면 $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\infty$가 되어

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)}{x}$의 값이 존재할 수 없다.

그러므로 $f'(0)\neq 0$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

㉡, ㉢에 의하여

$3-g'(0)=-3+g'(0)$, $g'(0)=3$

$g'(0)=\frac{1}{f'(0)}$에서 $f'(0)=\frac{1}{3}$

$f(x)=x^3+ax^2+bx$(a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(0)=b=\frac{1}{3}$

이때 $f'(1)=0$이면 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 $f'(1)\neq 0$

$f(1)=a+\frac{4}{3}$, $g'(f(1))=\frac{1}{f'(1)}=\frac{3}{6a+10}$이므로

조건 (나)에 의하여

$4\times\frac{3}{6a+10}=3\times\left(a+\frac{4}{3}\right)-4$

$3a^2+5a-2=0$에서 $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

㉠에 의하여

이차방정식 $f'(x)=3x^2+2ax+\frac{1}{3}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a)^2-4\times 3\times\frac{1}{3}=4(a^2-1)\le 0$

$-1\le a\le 1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

그러므로 $f(x)=x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

따라서 $f(3)=31$

[기하]

23	③	**24**	②	**25**	③	**26**	①	**27**	⑤
28	②	**29**	9	**30**	80				

23. [출제의도] 타원의 방정식 계산하기

타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{7}=1$의 한 초점의 좌표가 $(c, 0)$이므로

$c^2=10-7=3$에서 $c=\sqrt{3}$

24. [출제의도] 벡터의 연산 이해하기

$\vec{a}+2(\vec{b}-\vec{a})=-\vec{a}+2\vec{b}$이고

두 벡터 $-\vec{a}+2\vec{b}$, $-2\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 평행하므로

$-2\vec{a}+k\vec{b}=l(-\vec{a}+2\vec{b})$

를 만족시키는 실수 $l(l\neq 0)$이 존재한다.

$-2\vec{a}+k\vec{b}=-l\vec{a}+2l\vec{b}$에서

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$-2=-l$, $k=2l$

따라서 $k=4$

25. [출제의도] 타원의 정의 이해하기

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$이라 하자.

삼각형 PRF의 둘레의 길이와

삼각형 QF′R의 둘레의 길이의 합은

$(\overline{PR}+\overline{RF}+\overline{FP})+(\overline{QF'}+\overline{F'R}+\overline{RQ})$

$=(\overline{PF}+\overline{PR}+\overline{RF'})+(\overline{QR}+\overline{RF}+\overline{QF'})$

$=(\overline{PF}+\overline{PF'})+(\overline{QF}+\overline{QF'})$

$=2a+2a=4a=12$

에서 $a=3$

$b^2=3^2-(\sqrt{3})^2=6$, $b=\sqrt{6}$

따라서 타원의 단축의 길이는 $2\sqrt{6}$

26. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식 이해하기

점 A의 좌표를 $A(x_1, y_1)$이라 하자.

포물선 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$이므로 접선의 기울기는 $\frac{2p}{y_1}$

접선의 기울기와 직선 OA의 기울기의 곱이

$\frac{3}{2}$이므로

$\frac{2p}{y_1}\times\frac{y_1}{x_1}=\frac{3}{2}$에서 $x_1=\frac{4p}{3}$

점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=\overline{AF}$이므로

$x_1+p=\frac{4p}{3}+p=\frac{7p}{3}=14$

따라서 $p=6$

27. [출제의도] 쌍곡선의 점근선을 활용하여 문제해결하기

두 직선 l, m은 y축에 대하여 대칭이고,

직선 PF는 직선 m과 서로 평행하므로 $\overline{OP}=\overline{PF}$

$\angle F'PF=\frac{\pi}{2}$에서 점 P는 선분 FF′을 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\overline{OP}=\overline{OF}$

그러므로 삼각형 POF는 한 변의 길이가 c인 정삼각형이다.

$\angle PFF'=\frac{\pi}{3}$이므로 직각삼각형 PF′F에서

$\overline{PF'}=\sqrt{3}c$

쌍곡선 C의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$이라 하면

점근선 l의 방정식이 $y=\frac{b}{a}x$이고

$\angle FOP=\frac{\pi}{3}$이므로 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$에서 $b=\sqrt{3}a$

점 F가 쌍곡선 C의 초점이므로

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(\sqrt{3}a)^2}=2a$

$\overline{PQ}=2$에서 $\overline{QF}=c-2$

점 Q가 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{QF'}-\overline{QF}=2a$에서 $\overline{QF'}=\overline{QF}+2a=2c-2$

삼각형 PF′Q가 직각삼각형이므로

$(2c-2)^2=(\sqrt{3}c)^2+2^2$, $c^2-8c=0$

따라서 $c=8$

28. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 추론하기

$\overline{OF}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$이고

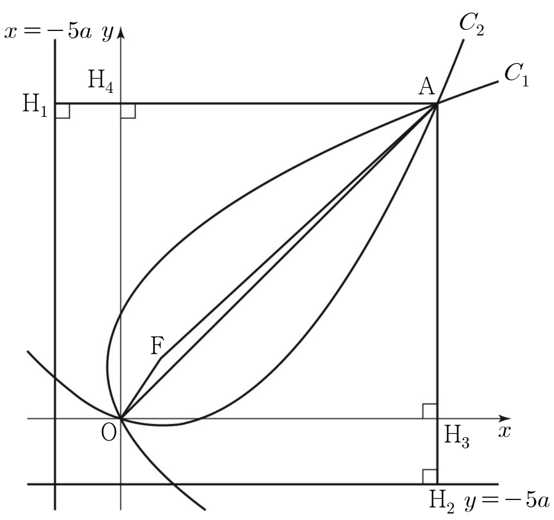
점 O와 두 직선 $x=-5a$, $y=-5a$ 사이의 거리가 모두 $5a$이므로 점 O는 두 포물선 C_1, C_2가 만나는 점이다.

점 O가 점 A이면 $\overline{OA}=6$을 만족시키지 않으므로 점 O는 점 B이다.

$\overline{BF}=\overline{OF}=5a$

점 A에서 두 직선 $x=-5a$, $y=-5a$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $\overline{AF}=\overline{AH_1}=\overline{AH_2}$

점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 H_3, H_4라 하면 $\overline{AH_3}=\overline{AH_4}=\overline{AH_1}-5a$



그러므로 사각형 AH_4OH_3는 한 변의 길이가 $\overline{AH_1}-5a$인 정사각형이다.

이때 선분 OA는 정사각형 AH_4OH_3의 대각선이므로

$\overline{OA}=\sqrt{2}(\overline{AH_1}-5a)=6$에서 $\overline{AH_1}=3\sqrt{2}+5a$

$\overline{AF}=\overline{AH_1}=3\sqrt{2}+5a$

따라서 $\overline{AF}-\overline{BF}=(3\sqrt{2}+5a)-5a=3\sqrt{2}$

29. [출제의도] 벡터의 연산을 이용하여 추론하기

점 M을 직선 BC에 대하여 대칭이동한 점을 E라 하고, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{EP'}$을 만족시키는 점을 P′이라 하면

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CE}$이므로

$\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{MQ}=(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CP})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BQ})$

$=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EP'}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BQ}$

$=(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EP'})+\overrightarrow{BQ}$
$=\overrightarrow{DP'}+\overrightarrow{BQ}$

$|\overrightarrow{BQ}|=1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{DP'}$, $\overrightarrow{BQ}$의 방향이 같고 $|\overrightarrow{DP'}|$의 값이 최대일 때, $|\overrightarrow{DP'}+\overrightarrow{BQ}|$의 값은 최대이다.

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EB'}$을 만족시키는 점을 B′이라 하고, 직선 DB′과 평행하고 점 B를 지나는 직선이 호 AC와 만나는 점을 X라 하자.

두 벡터 $\overrightarrow{DB'}$, $\overrightarrow{BX}$의 방향이 같고 $|\overrightarrow{DP'}| \le |\overrightarrow{DB'}|$이므로 점 P′이 점 B′이고 점 Q가 점 X일 때 $|\overrightarrow{DP'}+\overrightarrow{BQ}|$의 값은 최대이다.

$|\overrightarrow{DB'}|=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$이므로

$$|\overrightarrow{DP'}+\overrightarrow{BQ}| \le |\overrightarrow{DB'}+\overrightarrow{BX}|$$
$$=|\overrightarrow{DB'}|+|\overrightarrow{BX}|$$
$$=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$$

따라서 $p=2$, $q=7$이므로 $p+q=9$

30. [출제의도] 타원의 접선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

두 점 P, F를 지나는 직선의 기울기가 음수이므로 점 Q는 제1사분면 위의 점이다.

점 Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(k,\, b^2)\ (k>0)$이라 하면 점 Q가 타원 위의 점이므로

$k^2+\frac{b^4}{b^2}=1$에서 $k^2=1-b^2$

그러므로 $\mathrm{Q}(\sqrt{1-b^2},\, b^2)$

타원 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은

$\sqrt{1-b^2}\,x+\frac{b^2y}{b^2}=1$, $\sqrt{1-b^2}\,x+y=1$

이 직선이 점 $\mathrm{F}(c,\,0)$을 지나므로 $c=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$

이때 점 F는 쌍곡선의 초점이므로

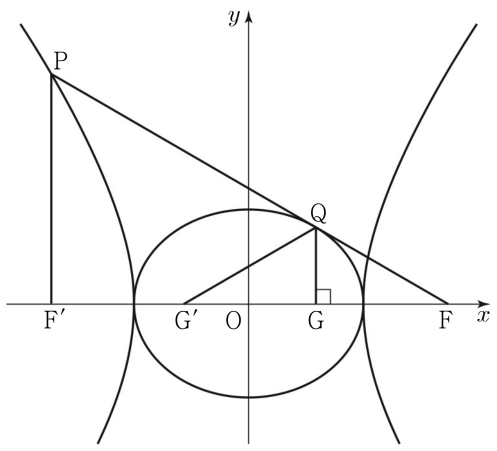
$c=\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$ ⋯ ㉠

타원의 두 초점을 $\mathrm{G}(d,\,0)$, $\mathrm{G'}(-d,\,0)\ (d>0)$이라 하면 $d^2=1-b^2$이므로

$\mathrm{G}(\sqrt{1-b^2},\,0)$, $\mathrm{G'}(-\sqrt{1-b^2},\,0)$

직선 QG가 x축에 수직이므로

$\overline{\mathrm{QG}}=b^2$



타원의 장축의 길이가 2이므로

$\overline{\mathrm{QG}}+\overline{\mathrm{QG'}}=2$에서 $\overline{\mathrm{QG'}}=2-\overline{\mathrm{QG}}=2-b^2$

쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=2$에서 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}+2$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF'}}+b^2$이므로

$$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}$$
$$=(\overline{\mathrm{PF'}}+2)-(\overline{\mathrm{PF'}}+b^2)$$
$$=2-b^2$$

$\overline{\mathrm{QG'}}=\overline{\mathrm{QF}}$이므로

삼각형 QG′F는 이등변삼각형이다.

점 G는 선분 FG′의 중점이므로 $\overline{\mathrm{FG}}=\overline{\mathrm{GG'}}$

$\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}-\sqrt{1-b^2}=2\sqrt{1-b^2}$에서 $b^2=\frac{2}{3}$

㉠에 의하여 $a^2=2$

따라서 $30(a^2+b^2)=30\times\left(2+\frac{2}{3}\right)=80$