

수학 영역

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정답

1	③	2	②	3	①	4	⑤	5	④
6	③	7	②	8	④	9	⑤	10	①
11	③	12	①	13	②	14	④	15	①
16	7	17	38	18	12	19	24	20	213
21	320	22	26						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$5^{-\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}} \times (5^2)^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 5$$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = 9$$

3. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 계산하기

$$\sum_{k=1}^5 (k + 3a_k) = \sum_{k=1}^5 k + 3 \sum_{k=1}^5 a_k$$

$$= \frac{5 \times 6}{2} + 3 \sum_{k=1}^5 a_k = 27$$

$$3 \sum_{k=1}^5 a_k = 27 - 15 = 12$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^5 a_k = 4$$

4. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (2x + a) = 2 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 - ax + 11) = 12 - a$$

$$f(1) = 12 - a$$

$$2 + a = 12 - a, \quad 2a = 10$$

$$\text{따라서 } a = 5$$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$$g'(x) = (2x + 2)f'(x) + (x^2 + 2x)f''(x)$$

$$g'(1) = 4f'(1) + 3f''(1) = 4 \times 2 + 3 \times 1 = 11$$

6. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log_{\sqrt{a}} b = 6 \text{ 에서 } b = (\sqrt{a})^6 = a^3$$

$$\log_4 a + \log_2 b = \log_4 a + \log_4 b^2$$

$$= \log_4 ab^2$$

$$= \log_4 a(a^3)^2$$

$$= \log_4 a^7$$

$$= 7 \log_4 a = 14$$

$$\log_4 a = 2, \quad a = 4^2 = 16, \quad b = 16^3$$

$$\log_2 \frac{b}{a} = \log_2 \frac{16^3}{16} = \log_2 16^2 = \log_2 2^8 = 8$$

7. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$$\int_0^2 f(x) dx - \int_0^{-2} f(x) dx$$

$$= \int_0^2 f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{40}{3}$$

$$\int_{-2}^2 (x^3 + x^2 + a) dx = 2 \int_0^2 (x^2 + a) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + ax \right]_0^2$$

$$= \frac{16}{3} + 4a$$

$$\frac{16}{3} + 4a = \frac{40}{3}, \quad 4a = 8$$

$$\text{따라서 } a = 2$$

8. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \text{ 이므로}$$

$$2 \cos \theta + \sin \theta = 0$$

$$2 \cos \theta = -\sin \theta \quad \textcircled{1}$$

$$4 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$4 \cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\sin \theta < 0 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } \cos \theta > 0$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

9. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$$f'(x) = 6x^2 - 14x$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의

점 $(t, f(t))$ ($t > 0$) 에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

$$y = (6t^2 - 14t)(x - t) + 2t^3 - 7t^2 + 1$$

접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = (6t^2 - 14t)(0 - t) + 2t^3 - 7t^2 + 1$$

$$1 = -4t^3 + 7t^2 + 1$$

$$4t^3 - 7t^2 = t^2(4t - 7) = 0$$

$$\text{따라서 } t = \frac{7}{4}$$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

$$\text{함수 } y = \cos \frac{\pi x}{a} \text{ 의 주기는 } \frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = 2a$$

$$0 \leq x \leq 2a \text{ 에서 } \cos \frac{\pi x}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi x}{a} = \frac{5\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{a}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}a$$

$$\text{점 A 의 좌표는 } \left(\frac{a}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{점 B 의 좌표는 } \left(\frac{5}{3}a, \frac{1}{2}\right)$$

$$0 \leq x \leq 2a \text{ 에서 } \cos \frac{\pi x}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi x}{a} = \frac{2\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi x}{a} = \frac{4\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{2}{3}a \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}a$$

$$\text{점 C 의 좌표는 } \left(\frac{2}{3}a, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{점 D 의 좌표는 } \left(\frac{4}{3}a, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{AB} = \frac{4}{3}a, \quad \overline{CD} = \frac{2}{3}a$$

사각형 ACDB 는 사다리꼴이므로

사각형 ACDB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}a + \frac{2}{3}a\right) \times 1 = a = \frac{3}{2}$$

$$\overline{AB} = \frac{4}{3}a = 2$$

$$\text{따라서 } a \times \overline{AB} = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

11. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 문제 해결하기

시각이 t ($t \geq 0$) 일 때

점 P 의 위치를 $x(t)$ 라 하면 $x(0) = 0$

$$\neg. k = 0 \text{ 이면, } v(t) = 3t^2 - 6t$$

$$x(1) = x(0) + \int_0^1 v(t) dt$$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 6t) dt$$

$$= \left[t^3 - 3t^2\right]_0^1 = -2 \quad (\text{참})$$

$$\neg. k = 2 \text{ 이면, } v(t) = 3t^2 - 6t + 2$$

시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인

거리와 점 P 의 위치의 변화량이 같아지려면

$0 \leq t \leq 3$ 인 모든 t 에 대하여

$$v(t) \geq 0 \text{ 이어야 한다.}$$

$$v(1) = -1 \text{ 이므로}$$

시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인

거리는 점 P 의 위치의 변화량과 같지 않다.

(거짓)

$$\neg. k = -9 \text{ 이면, } v(t) = 3t^2 - 6t - 9$$

$$3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3) \text{ 이므로}$$

시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P 가 움직인

거리는

$$\int_0^4 |v(t)| dt$$

$$= \int_0^3 (-3t^2 + 6t + 9) dt + \int_3^4 (3t^2 - 6t - 9) dt$$

$$= \left[-t^3 + 3t^2 + 9t\right]_0^3 + \left[t^3 - 3t^2 - 9t\right]_3^4$$

$$= 27 + 7 = 34 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$

12. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$),

공비를 r ($r > 0$)이라 하자.

$a_n = ar^{n-1}$ (단, n 은 자연수)

$a_5 \times (a_6 + a_7) = 20a_{10}$ 이므로

$$ar^4 \times (ar^5 + ar^6) = 20ar^9$$

양변을 ar^9 으로 나누면

$$a(1+r) = 20$$

$$a = \frac{20}{1+r} \quad \cdots \text{㉠}$$

$r = 1$ 인 경우 $a = 10$, $S_4 = 40$

그러므로 $S_4 = 65$ 를 만족시키지 않는다.

공비 r 은 1이 아닌 양수이므로

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{20}{1+r} \times \frac{r^4 - 1}{r - 1} \\ &= \frac{20(r^2 + 1)(r^2 - 1)}{r^2 - 1} \\ &= 20(r^2 + 1) \\ &= 65 \end{aligned}$$

$$r^2 + 1 = \frac{65}{20} = \frac{13}{4}, \quad r^2 = \frac{9}{4}$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = \frac{3}{2}$$

㉠에 의하여 $a = 8$

$$\text{따라서 } a_2 = ar = 8 \times \frac{3}{2} = 12$$

13. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1)$$

이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축이 만나는

점의 좌표는 $(-2, 0)$

$$g(x) = 4x + 2 \text{라 하면}$$

$$f(x) = g(x) \text{에서}$$

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = 4x + 2$$

$$x(x-1)(x+3) = 0$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \text{이므로}$$

점 P의 좌표는 $(1, 6)$, 점 Q의 좌표는 $(0, 2)$

$$g(x) = 0 \text{에서}$$

$$4x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{이므로 점 R의 좌표는 } \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$A = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(x) - g(x)) dx$$

$$B = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$$

$$A - B$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(x) - g(x)) dx \\ &\quad - \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(x) - g(x)) dx \\ &\quad + \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}}^1 g(x) dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^3 + 2x^2 + x + 2) dx - \int_{-\frac{1}{2}}^1 (4x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 - \left[2x^2 + 2x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } A - B = \frac{9}{4}$$

[참고]

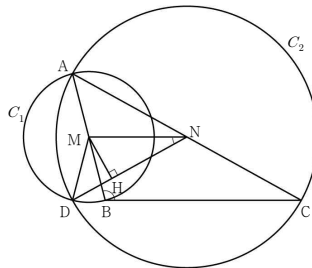
점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 g(x) dx \text{의 값은}$$

삼각형 RHP의 넓이와 같다.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \times 6 = \frac{9}{2}$$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기



$\angle CBA = \theta$ 라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = \frac{8}{\sin \theta} = 2 \times \frac{16\sqrt{15}}{15}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

$\overline{BC} = a$ ($a > 0$)이라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}}$$

$$-\frac{1}{4} = \frac{16 + a^2 - 64}{2 \times 4 \times a}$$

$$a^2 + 2a - 48 = 0, \quad (a-6)(a+8) = 0$$

$$a = 6$$

두 점 M, N은 각각 선분 AB와 선분 AC의

$$\text{중점이므로 } \overline{MN} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} = 3$$

점 D는 원 C_1 위의 점이므로 $\overline{MD} = 2$

점 D는 원 C_2 위의 점이므로 $\overline{DN} = 4$

$\angle MND = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)라 하자.

삼각형 MDN에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\overline{MN}^2 + \overline{DN}^2 - \overline{MD}^2}{2 \times \overline{MN} \times \overline{DN}} \\ &= \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

따라서 직각삼각형 MHN에서

$$\overline{MH} = \overline{MN} \times \sin \alpha = 3 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

[다른 풀이]

$$\overline{AB} = 2\overline{AM}, \quad \overline{AC} = 2\overline{AN},$$

$\angle MAN$ 은 공통이므로

두 삼각형 ABC와 AMN은 서로 닮음이고

닮음비는 2:1, 넓이의 비는 4:1이다.

$$\overline{AM} = \overline{DM}, \quad \overline{AN} = \overline{DN} \text{이고}$$

선분 MN은 공통이므로

두 삼각형 AMN과 DMN은 서로 합동이다.

삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin \theta &= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{15}}{4} \\ &= 3\sqrt{15} \end{aligned}$$

삼각형 DMN의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \times 3\sqrt{15} &= \frac{1}{2} \times \overline{DN} \times \overline{MH} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{MH} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \overline{MH} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$$p(x) = f(x) - g(x) \text{라 하자.}$$

$$h(x) = f(x) + |p(x)|$$

함수 $h(x)$ 는 $p(x) \neq 0$ 인 모든 실수 x 에서

미분가능하다.

조건 (가)에 의하여 $p(-1) = 0$, $p'(-1) \neq 0$

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + b$$

$$p(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a + b = 0, \quad b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}$$

$$p'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - ax$$

$$p'(-1) = -\frac{3}{2} + a \neq 0, \quad a \neq \frac{3}{2}$$

$$p(x) = -\frac{1}{2}(x+1)\{x^2 + (a-1)x - (a-1)\} \text{에서}$$

$$a \neq \frac{3}{2} \text{이므로}$$

x 에 대한 방정식 $x^2 + (a-1)x - (a-1) = 0$ 은 -1 을 근으로 갖지 않는다.

x 에 대한 방정식 $x^2 + (a-1)x - (a-1) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-1)^2 + 4(a-1) = (a-1)(a+3)$$

$D > 0$ 이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $D \leq 0$, $-3 \leq a \leq 1 \quad \cdots \text{㉠}$

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + a - 1 & (x \leq -1) \\ \frac{2}{3}x^3 + ax^2 & (x > -1) \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} -x^2 & (x < -1) \\ 2x^2 + 2ax & (x > -1) \end{cases}$$

조건 (나)에 의하여

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이므로

$$a < 0 \quad \text{㉔}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=-1$, $x=-a$ 에서 극소이므로

$$\alpha = -1, \beta = -a$$

$$h(\alpha) = h(-1) = \frac{1}{3} + a - 1 = a - \frac{2}{3}$$

$$h(\beta) = h(-a) = \frac{1}{3}a^3$$

$$h(\alpha) \geq h(\beta), a - \frac{2}{3} \geq \frac{1}{3}a^3$$

$$(a-1)^2(a+2) \leq 0$$

$$a=1 \text{ 또는 } a \leq -2 \quad \text{㉕}$$

$$\text{㉔, ㉕에 의하여 } -3 \leq a \leq -2$$

$$b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$a+b = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{3}{2} \times (-2) - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$m = \frac{3}{2} \times (-3) - \frac{1}{2} = -5$$

$$\text{따라서 } M-m = -\frac{7}{2} - (-5) = \frac{3}{2}$$

16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{a_1}{1} + 4 = 6$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} + 4 = 7$$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$= \int (3x^2 + 4) dx$$

$$= x^3 + 4x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$F(0) + F(2) = C + (16 + C) = 14$$

$$C = -1$$

$$F(x) = x^3 + 4x - 1$$

$$\text{따라서 } F(3) = 27 + 12 - 1 = 38$$

18. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

로그의 진수는 양수이므로

$$x+4 > 0, x-2 > 0$$

$$x > 2 \quad \text{㉔}$$

$$\log_3(x+4) \leq 3 + \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

$$\log_3(x+4) - \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \leq 3$$

$$\log_3(x+4) + \log_3(x-2) \leq 3$$

$$\log_3(x+4)(x-2) \leq \log_3 27$$

로그의 밑이 1보다 크므로

$$(x+4)(x-2) \leq 27$$

$$x^2 + 2x - 35 \leq 0$$

$$(x-5)(x+7) \leq 0$$

$$-7 \leq x \leq 5 \quad \text{㉔}$$

㉔, ㉕에 의하여

$$2 < x \leq 5 \text{ 이므로}$$

정수 x 의 값은 3, 4, 5

따라서 구하는 모든 정수 x 의 값의 합은 12

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

단한구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와

감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	k	$\searrow$	$k-16$	$\nearrow$	$k-9$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 k 를 갖고,

$x=2$ 에서 극소이면서 최솟값 $k-16$ 을 갖는다.

$$f(0) = k = 40 \text{ 이므로}$$

$$k = 40$$

따라서 단한구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의

$$\text{최솟값은 } f(2) = k - 16 = 24$$

20. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$\text{자연수 } n \text{에 대하여 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \dots \dots \text{㉔}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

(i) $n = 2k-1$ (k 는 자연수)일 때,

㉔에 의하여

$$b_{2k-1} = 2 \times \left\{ \frac{(2k-1)(a_1 + a_{2k-1})}{2} - (2k-1)a_{2k-1} \right\}$$

$$= (2k-1)(a_1 + a_{2k-1})$$

$$- 2(2k-1)a_{2k-1}$$

$$= (2k-1) \times (a_1 - a_{2k-1})$$

(ii) $n = 2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$b_{2k} = (2k-1)a_{2k}$$

$$b_2 = (2-1)a_2 = a_2 = 2$$

(i), (ii)에 의하여

$$b_{2k-1} + b_{2k} = ((2k-1)) \times (a_1 - a_{2k-1}) + (2k-1)a_{2k}$$

$$= (2k-1) \times \{a_1 + (a_{2k} - a_{2k-1})\}$$

$$= (2k-1) \times (a_1 + d)$$

$$= (2k-1) \times a_2$$

$$= (4k-2) \quad \dots \dots \text{㉕}$$

이다.

㉕에 의하여

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{20} b_n \\ &= (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots + (b_{19} + b_{20}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (b_{2k-1} + b_{2k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{10} (4k-2) \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times 10 \\ &= \boxed{200} \end{aligned}$$

이다.

$$f(k) = 2k-1, g(k) = 4k-2, p = 200$$

$$\text{따라서 } f(2) + g(3) + p = 3 + 10 + 200 = 213$$

21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

조건 (가)에서 $\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 6$ 이므로

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 세 점의 x 좌표는

$$x = a, x = b, x = 4 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a < 4 \leq \frac{3}{2}a, b > \frac{3}{2}a \text{ 또는}$$

$$a < 4 \leq \frac{3}{2}a, b < a$$

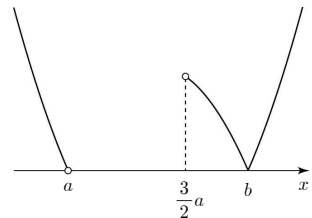
$$4 = \frac{3}{2}a \text{ 이면 } \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 5 \text{ 이므로}$$

$$4 < \frac{3}{2}a \text{ 이어야 한다.}$$

$$(I) a < 4 < \frac{3}{2}a, b > \frac{3}{2}a \text{ 인 경우}$$

$$x < a \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}a \text{ 에서}$$

함수 $y = |(x-a)(x-b)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 양의 실수 m 에 대하여

$$x < a \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}a \text{ 에서}$$

직선 $y = m$ 과

함수 $y = |(x-a)(x-b)|$ 의 그래프가

만나는 서로 다른 점의 개수는

2 이상이므로

$$\lim_{t \rightarrow m+} g(t) \geq 2 \text{ 이다.}$$

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$(II) a < 4 < \frac{3}{2}a, b < a \text{ 인 경우}$$

$$\left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| = \left| \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - 4 \right) \right| = \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - 4 \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}a+} |f(x)| &= \left| \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - b \right) \right| \\ &= \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - b \right) \end{aligned}$$

$b < 4$ 이므로

$$\left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| < \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}a+} |f(x)| \text{ 이다.}$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}a+} |f(x)| = k_1$ 이라 하면

$$\left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| \geq k_1 \text{ 또는}$$

$$\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \geq k_1 \text{ 일 때}$$

모든 양의 실수 m 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow m+} g(t) \geq 2 \text{ 이므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$\text{그러므로 } \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| < k_1 \text{ 이고,}$$

$$\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| < k_1 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{t \rightarrow k_1-} g(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow k_1+} g(t) = 2 \text{ 이므로}$$

함수 $g(t)$ 는 $t = k_1$ 에서 불연속이다.

조건 (나)에 의하여 $\beta = k_1$ 이다.

(I), (II)에 의하여

$$b < a < 4 < \frac{3}{2}a, \quad \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| < \beta,$$

$$\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| < \beta, \quad \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| < \beta$$

함수 $g(t)$ 는 $t = \alpha, t = \beta$ 에서만 불연속이므로
다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

$$(i) \quad \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| \neq \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \text{ 인 경우}$$

함수 $g(t)$ 가

$$t = \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right|, \quad t = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right|,$$

$t = \beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$(ii) \quad \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \neq \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| \text{ 인 경우}$$

함수 $g(t)$ 가

$$t = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right|, \quad t = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right|,$$

$t = \beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$(iii) \quad \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| \neq \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| \text{ 인 경우}$$

함수 $g(t)$ 가

$$t = \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right|, \quad t = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right|,$$

$t = \beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$(iv) \quad \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| \text{ 인 경우}$$

$$\left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| = k_2 \text{ 라 하면}$$

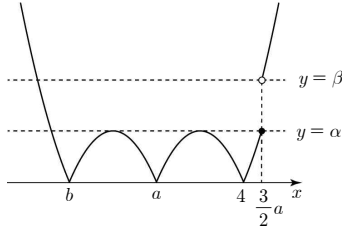
$$\lim_{t \rightarrow k_2-} g(t) = 6, \quad \lim_{t \rightarrow k_2+} g(t) = 1 \text{ 이므로}$$

함수 $g(t)$ 는 $t = k_2, t = \beta$ 에서만

불연속이다.

(i) ~ (iv)에 의하여 $\alpha = k_2$ 이다.

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| \text{ 이므로}$$

$$\frac{(a-4)^2}{4} = \frac{a(3a-8)}{4}$$

$$a^2 - 8a + 16 = 3a^2 - 8a, \quad a^2 = 8$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 2\sqrt{2}$$

$$\left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \text{ 이므로}$$

$$\frac{(a-b)^2}{4} = \frac{(4-a)^2}{4}$$

$$b < a < 4 \text{ 이므로 } a-b = 4-a$$

$$b = 2a-4 = 4\sqrt{2}-4$$

$$f(0) = ab = 2\sqrt{2}(4\sqrt{2}-4) = 16-8\sqrt{2}$$

$$p = 16, \quad q = -8$$

$$\text{따라서 } p^2 + q^2 = 256 + 64 = 320$$

22. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

$$f(x) = 2^{x-m} + n,$$

$$g(x) = \log_2(x-n+1) + m - 7 \text{ 이라 하자.}$$

점 A(a, b)는 제 1 사분면 위의 점이므로

$$0 < a < b$$

점 B는 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여

대칭이동한 점이므로 B(b, a)이고,

곡선 $y = \log_2(x-n)+m$ 위의 점이다.

곡선 $y = g(x)$ 는 곡선 $y = \log_2(x-n)+m$ 을

x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로

-7 만큼 평행이동한 곡선과 일치한다.

점 B를 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 점을

B'(b-1, a-7)이라 하면

점 B'은 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이다.

점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$ 인

원을 C라 하자.

$$BB' = 5\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

점 B'은 원 C 위의 점이다.

원 C와 곡선 $y = g(x)$ 가 만나는 두 점을

C(x₁, y₁), D(x₂, y₂)라 하면 $x_1 < x_2$ 이고

함수 $g(x)$ 는 $x > n-1$ 일 수 전체의 집합에서

증가하므로 $y_1 < y_2$

점 B'은 원 C와 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이므로

점 B'은 점 C와 일치하거나 점 D와 일치한다.

점 B'이 점 D와 일치하는 경우

$$x_1 < b-1, \quad y_1 < a-7$$

$$b-x_1 > 1, \quad a-y_1 > 7$$

$$BC = \sqrt{(b-x_1)^2 + (a-y_1)^2} > 5\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

점 C가 원 C 위의 점이라는 조건에 모순이다.

그러므로 점 B'은 점 C와 일치한다.

조건 (가)에 의하여

직선 AC의 기울기는

$$\frac{a-7-b}{b-1-a} = -3$$

$$a-7-b = -3(b-1-a)$$

$$a-b = -5 \quad \dots \textcircled{1}$$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -x + a + b \text{ 이므로}$$

두 점 O, C와 직선 $x+y-a-b=0$ 사이의

거리를 각각 h_1, h_2 라 하면

$$h_1 = \frac{|-a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$$

$$h_2 = \frac{|(b-1)+(a-7)-a-b|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{삼각형 AOB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_1 \text{ 이고}$$

$$\text{삼각형 ACB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_2 \text{ 이므로}$$

삼각형 AOB와 삼각형 ACB의 넓이의 비는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_1 : \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_2 = 27 : 8$$

$$8h_1 = 27h_2$$

$$8 \times \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} = 27 \times 4\sqrt{2}$$

$$a+b = 27 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } a = 11, \quad b = 16$$

점 A(11, 16)은 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$2^{11-m} + n = 16$$

위 식을 만족시키는

두 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 은

$(8, 8), (9, 12), (10, 14), (11, 15)$ 이다.

따라서 $m+n$ 의 최댓값은 $11+15=26$

미적분 정답

23	㉓	24	㉔	25	㉕	26	㉖	27	㉗
28	㉘	29	30	30	59				

미적분 해설

23. [출제의도] 지수함수와 삼각함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 6x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 6x}{6x} \times 6}{\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2} = 3$$

24. [출제의도] 합성함수의 미분법 이해하기

주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x^3 + 2x + 2) \times (3x^2 + 2) = -\pi \cos \pi x \quad \cdots \textcircled{1}$$

방정식 $x^3 + 2x + 2 = 5$ 에서

$$(x-1)(x^2 + x + 3) = 0 \text{ 이므로 } x = 1$$

㉓에 $x = 1$ 을 대입하면

$$f'(5) \times (3 \times 1^2 + 2) = -\pi \cos \pi = -\pi$$

$$\text{따라서 } f'(5) = \frac{\pi}{5}$$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + n^2}{2n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n^2} + 1}{2 + \frac{4}{n^2}} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 3$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{a_n + 3n} - \sqrt{a_n + n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a_n + 3n} - \sqrt{a_n + n}} \times \frac{\sqrt{a_n + 3n} + \sqrt{a_n + n}}{\sqrt{a_n + 3n} + \sqrt{a_n + n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_n + 3n} + \sqrt{a_n + n}}{(a_n + 3n) - (a_n + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_n + 3n} + \sqrt{a_n + n}}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{a_n}{n^2} + \frac{3}{n}} + \sqrt{\frac{a_n}{n^2} + \frac{1}{n}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

26. [출제의도] 치환적분법 이해하기

두 점 P, Q의 x 좌표를 구하면

$$e^x = t \text{에서 } x = \ln t$$

$$e^x = t + 2 \text{에서 } x = \ln(t + 2)$$

$$f(t) = \ln(t + 2) - \ln t \text{ 이므로}$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{\ln(t + 2) - \ln t}{t^2} dt = \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{t^2} \ln \left(1 + \frac{2}{t} \right) dt$$

$$1 + \frac{2}{t} = u \text{라 하면 } -\frac{2}{t^2} = \frac{du}{dt}$$

$$t = \frac{2}{3} \text{일 때 } u = 4$$

$$t = 2 \text{일 때 } u = 2$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{t^2} \ln \left(1 + \frac{2}{t} \right) dt &= \int_4^2 \left(-\frac{1}{2} \ln u \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_2^4 \ln u du \\ &= \frac{1}{2} \left[u \ln u - u \right]_2^4 \\ &= \frac{1}{2} \{ (4 \ln 4 - 4) - (2 \ln 2 - 2) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (8 \ln 2 - 4) - (2 \ln 2 - 2) \} \\ &= \frac{1}{2} (6 \ln 2 - 2) = 3 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{f(t)}{t^2} dt = -1 + 3 \ln 2$$

27. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$$x = \cos t + t \sin t \text{에서 } \frac{dx}{dt} = t \cos t$$

$$y = \sin t - t \cos t \text{에서 } \frac{dy}{dt} = t \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t \sin t}{t \cos t} = \tan t$$

$t = k$ 일 때,

곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$\tan k$ 이므로 곡선 위의 점 P에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기는 k 이다.

직선 $y = \frac{1}{2}x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는

예각의 크기를 α 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$|\tan(k - \alpha)| = \tan \theta = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} |\tan(k - \alpha)| &= \left| \frac{\tan k - \tan \alpha}{1 + \tan k \times \tan \alpha} \right| \\ &= \left| \frac{\tan k - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \times \tan k} \right| = \frac{1}{2} \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\tan k = 0 \text{ 또는 } \tan k = \frac{4}{3}$$

$$0 < k < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \tan k = \frac{4}{3}$$

$$\sin k = \frac{4}{5}, \cos k = \frac{3}{5}$$

$$a = \cos k + k \sin k = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}k$$

$$b = \sin k - k \cos k = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}k$$

따라서

$$\begin{aligned} 3a + 4b + \tan k &= \frac{9}{5} + \frac{12}{5}k + \frac{16}{5} - \frac{12}{5}k + \frac{4}{3} \\ &= \frac{19}{3} \end{aligned}$$

28. [출제의도] 부분적분법을 활용하여 문제 해결하기

$$\int_1^{e^x} f^{-1}(g(t)) dt = (x-1)e^x + k \quad \cdots \textcircled{1}$$

㉓의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = -1 + k, k = 1$$

㉓의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f^{-1}(g(e^x)) \times e^x = xe^x \text{ 이고}$$

$$e^x > 0 \text{이므로 } f^{-1}(g(e^x)) = x$$

$$\text{그러므로 } g(e^x) = f(x)$$

$$g^{-1}(f(x)) = e^x$$

$$f^{-1}(x) = u \text{라 하면}$$

$$x = f(u) \text{이고 } 1 = f'(u) \frac{du}{dx}$$

$$x = f(0) \text{일 때 } u = 0,$$

$$x = f(k) = f(1) \text{일 때 } u = 1$$

$$\int_{f(0)}^{f(k)} (f^{-1}(x) + g^{-1}(x)) dx$$

$$= \int_0^1 \{ u + g^{-1}(f(u)) \} f'(u) du$$

$$= \int_0^1 (u + e^u) f'(u) du$$

$$= \left[(u + e^u) f(u) \right]_0^1 - \int_0^1 (1 + e^u) f(u) du$$

$$= \left[(u + e^u) f(u) \right]_0^1 - \int_0^1 (1 + e^u) \left(u - \frac{1}{e^u + 1} \right) du$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ (1 + e) \times \left(1 - \frac{1}{e + 1} \right) - 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} \\ &\quad - \int_0^1 (u + ue^u - 1) du \end{aligned}$$

$$= \left(e + \frac{1}{2} \right) - \int_0^1 (u - 1) du - \int_0^1 ue^u du$$

$$= e + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} u^2 - u \right]_0^1 - \left[ue^u \right]_0^1 - \int_0^1 e^u du$$

$$= e + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - \{ (e - 0) - (e - 1) \}$$

$$= e$$

$$\text{따라서 } \int_{f(0)}^{f(k)} (f^{-1}(x) + g^{-1}(x)) dx = e$$

29. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ,

공비를 r 이라 하면

$$a_n = a \times r^{n-1} \text{ (단, } n \text{은 자연수)}$$

조건 (가)에 의하여 $a \neq 0, r \neq 0$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로

$$-1 < r < 0 \text{ 또는 } 0 < r < 1$$

(i) $0 < r < 1$ 인 경우

㉓ $a < 0$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n < a_{n+1} \text{이므로 } b_n = -a_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$\left(\frac{-a}{1-r} \right)^2 = 2 \times \frac{a^2}{1-r^2}$$

$$2(1-r)^2 = 1-r^2$$

$$2(1-r) = 1+r \text{이므로}$$

$$r = \frac{1}{3}$$

㉠에 의하여

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + b_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 63 \text{ 을 만족시키지 않는다.}$$

㉡ $a > 0$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n > a_{n+1} \text{ 이므로 } b_n = a_{2n} > 0$$

$$a_n b_n = a_n a_{2n} > 0 \text{ 이므로}$$

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $-1 < r < 0$ 인 경우

㉠ $a < 0$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여

$$n = 2m - 1 \text{ (} m \text{ 은 자연수)일 때,}$$

$$a_{2m-1} < 0 < a_{2m} \text{ 이므로}$$

$$b_{2m-1} = -a_{2m-1}$$

$$a_n b_n = -a_{2m-1} a_{2m-1} = -(a_{2m-1})^2 < 0$$

$$n = 2m \text{ (} m \text{ 은 자연수)일 때,}$$

$$a_{2m+1} < 0 < a_{2m} \text{ 이므로}$$

$$b_{2m} = a_{4m} > 0$$

$$a_n b_n = a_{2m} a_{4m} > 0 \text{ 이므로}$$

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

㉡ $a > 0$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여

$$n = 2m - 1 \text{ (} m \text{ 은 자연수)일 때,}$$

$$a_{2m} < 0 < a_{2m-1} \text{ 이므로}$$

$$b_{2m-1} = a_{4m-2} < 0$$

$$a_n b_n = a_{2m-1} a_{4m-2} < 0$$

$$n = 2m \text{ (} m \text{ 은 자연수)일 때,}$$

$$a_{2m} < 0 < a_{2m+1} \text{ 이므로}$$

$$b_{2m} = -a_{2m}$$

$$a_n b_n = -a_{2m} a_{2m} = -(a_{2m})^2 < 0 \text{ 이므로}$$

조건 (가)를 만족시킨다.

조건 (나)에서

$$\left(\frac{a}{1+r}\right)^2 = 2 \times \frac{a^2}{1-r^2}$$

$$2(1+r)^2 = 1-r^2$$

$$2(1+r) = 1-r \text{ 이므로}$$

$$r = -\frac{1}{3}$$

$$a_n + b_n = \begin{cases} a_n + a_{2n} & (n = 2m - 1) \\ 0 & (n = 2m) \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{4n-2})$$

$$= \frac{a}{1-r^2} + \frac{ar}{1-r^4}$$

$$= \frac{63}{80} a = 63$$

그러므로 $a = 80$

(i), (ii)에 의하여

$$a_n = 80 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_{2n} = -a_{2n} = \frac{80}{3} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{\frac{80}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = 30$$

30. [출제의도] 함수의 그래프 추론하기

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 또는

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$

$$(f(x))^3 + f(x) = \frac{a}{x^2 + 12} - bx - \frac{16}{3}b$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\{3(f(x))^2 + 1\}f'(x) = \frac{-2ax}{(x^2 + 12)^2} - b$$

양변을 $x = 0$ 을 대입하면

$$\{3(f(0))^2 + 1\}f'(0) = -b$$

$$3(f(0))^2 + 1 > 0 \text{ 이고 } b > 0 \text{ 이므로 } f'(0) < 0$$

그러므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \leq 0 \cdots \text{㉠}$$

$$g(x) = \frac{-2ax}{(x^2 + 12)^2} - b \text{ 라 하면}$$

$$g(x) = \{3(f(x))^2 + 1\}f'(x) \text{ 이고}$$

㉠에 의하여 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq 0$

조건 (나)에 의하여

$$g(k) = \{3(f(k))^2 + 1\}f'(k) = 0 \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $x = k$ 에서 최댓값 0을 갖는다.

$$g'(x) = \frac{6a(x+2)(x-2)}{(x^2 + 12)^3}$$

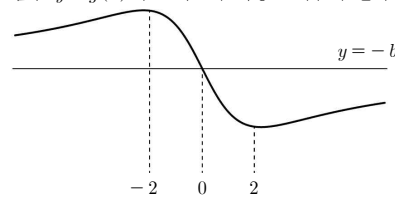
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -b, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -b$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{a}{64} - b$	$\searrow$	$-\frac{a}{64} - b$	$\nearrow$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y = g(x)$ 의 최댓값은

$$x = -2 \text{ 일 때뿐이므로 } k = -2$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -bx$ 가 만나는

서로 다른 모든 점의 x 좌표의 합은

$$k + 8 = 6 \text{ 이다.}$$

$$f'(-2) = 0 \text{ 이므로 } g(-2) = \frac{a}{64} - b = 0 \text{ 에서}$$

$$a = 64b$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -bx$ 가 만나는 점의 x 좌표를 t 라 하면

$$(f(t))^3 + f(t) = \frac{64b}{t^2 + 12} - bt - \frac{16}{3}b \text{ 이고}$$

$$f(t) = -bt \text{ 이므로}$$

$$(-bt)^3 - bt = \frac{64b}{t^2 + 12} - bt - \frac{16}{3}b$$

$$0 = b^3 t^3 + \frac{64b}{t^2 + 12} - \frac{16}{3}b$$

$$0 = b^2 t^3 + \frac{64}{t^2 + 12} - \frac{16}{3}$$

$$0 = \frac{3b^2 t^3(t^2 + 12) + 192 - 16(t^2 + 12)}{3(t^2 + 12)}$$

$$0 = \frac{t^2(3b^2 t^3 + 36b^2 t - 16)}{3(t^2 + 12)}$$

그러므로 방정식 $f(t) = -bt$ 의 한 실근은 $t = 0$

$$h(t) = 3b^2 t^3 + 36b^2 t - 16 \text{ 이라 하면}$$

$$h'(t) = 9b^2 t^2 + 36b^2$$

모든 실수 t 에 대하여 $h'(t) > 0$ 이므로

삼차함수 $h(t)$ 는 실수 전체의 집합에서

증가한다.

방정식 $h(t) = 0$ 의 실근의 개수는 1이고

그 실근을 $t = t_1$ ($t_1 \neq 0$)이라 하자.

방정식 $f(t) = -bt$ 는 서로 다른 두 실근을 갖고

두 실근은 $t = 0$ 과 $t = t_1$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -bx$ 가 만나는

서로 다른 모든 점의 x 좌표의 합은

$$0 + t_1 = 6 \text{ 이므로 } t_1 = 6$$

$$h(6) = 648b^2 + 216b^2 - 16 = 0$$

$$b^2 = \frac{1}{54} \text{ 이므로}$$

$$a \times b = 64b \times b = 64 \times b^2 = \frac{32}{27}$$

$$p = 27, q = 32$$

$$\text{따라서 } p + q = 59$$