

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ④ 02. ③ 03. ② 04. ② 05. ①
06. ⑤ 07. ② 08. ③ 09. ① 10. ③
11. ③ 12. ④ 13. ⑤ 14. ⑤ 15. ④
16. 6 17. 11 18. 38 19. 15 20. 17
21. 12 22. 97

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{3}{2}} \times 4^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{-1} \\ &= 2^{\frac{3}{2}-1} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

정답 ④

2. 출제의도 : 다항함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 - x - 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 1$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$= 6 \times 2^2 - 1 = 23$$

정답 ③

3. 출제의도 : 등차수열의 성질을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_{10} - a_7 = 9 \text{에서 } 3d = 9, d = 3$$

따라서

$$\begin{aligned} a_7 &= a_2 + 5d \\ &= 2 + 5 \times 3 = 17 \end{aligned}$$

정답 ②

4. 출제의도 : 함수의 연속을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (7x + a) = 14 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 + ax) = 4 + 2a$$

$$f(2) = 14 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2) \text{에서}$$

$$14 + a = 4 + 2a$$

$$\text{따라서 } a = 10$$

정답 ②

5. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \int_0^2 (2x^3 + 6x^2 - x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2^4 + 2 \times 2^3 - \frac{1}{2} \times 2^2 \\ &= 22 \end{aligned}$$

정답 ①

6. 출제의도 : 삼각함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

a, b 가 양수이므로 함수

$$f(x) = a \sin \frac{x}{b} + 2 \text{의 최댓값은 } a+2 \text{이고,}$$

$$\text{주기는 } \frac{2\pi}{\frac{1}{b}} = 2b\pi \text{이다.}$$

$$a+2=5 \text{에서 } a=3$$

$$2b\pi=8\pi \text{에서 } b=4$$

$$\text{따라서 } a+b=3+4=7$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 도함수를 활용하여 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 4ax \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 4a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이므로

$$f'(1) = 6 + 2a - 4a = 0, \quad a=3$$

$$\text{따라서 } f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 6(x+2)(x-1)=0$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \text{이고}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(-2)$$

$$= 2 \times (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 12 \times (-2)$$

$$= 20$$

정답 ②

8. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 공비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r>0$)이라 하면

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

이고,

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

이므로

$$\frac{S_3}{a_1 + 2a_2} = \frac{7}{3}$$

에서

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + 2a_2} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{a_1 + a_1r + a_1r^2}{a_1 + 2a_1r} = \frac{7}{3}$$

$$a_1 \neq 0 \text{이므로}$$

$$\frac{1+r+r^2}{1+2r} = \frac{7}{3}$$

$$3+3r+3r^2=7+14r$$

$$3r^2-11r-4=0$$

$$(3r+1)(r-4)=0$$

$$r>0\text{이므로 } r=4$$

따라서

$$\frac{a_8}{a_6} = \frac{a_6 \times r^2}{a_6}$$

$$= r^2$$

$$= 4^2 = 16$$

정답 ③

9. 출제의도 : 미분을 이용하여 두 점의 가속도의 차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$ 라 하고 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$ 라 하자.

$$v_1(t) = \frac{dx_1}{dt} = 12t^2 - 2t - 11$$

$$v_2(t) = \frac{dx_2}{dt} = 4t + 7$$

두 점의 속도가 같아지는 시각 t 는

$$12t^2 - 2t - 11 = 4t + 7 \text{에서}$$

$$6(2t-3)(t+1)=0$$

$$t \geq 0 \text{이므로}$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$a_1(t) = \frac{dv_1}{dt} = 24t - 2$$

$$a_2(t) = \frac{dv_2}{dt} = 4$$

따라서

$$p = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 24 \times \frac{3}{2} - 2 = 34$$

$$q = a_2\left(\frac{3}{2}\right) = 4$$

이므로

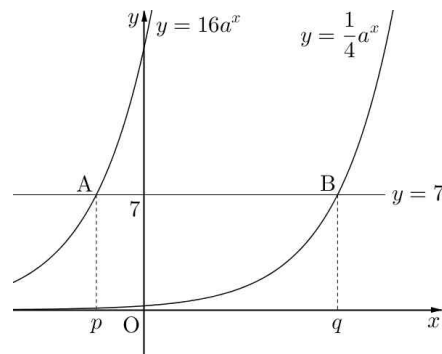
$$p - q = 34 - 4 = 30$$

정답 ①

10. 출제의도 : 지수함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a > 1$ 이므로 두 함수 $y = 16a^x$, $y = \frac{1}{4}a^x$ 의 그래프와 직선 $y = 7$ 을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



두 점 A, B의 x 좌표를 각각 p , q 라 하면

$$16a^p = 7, \quad \frac{1}{4}a^q = 7 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\overline{AB} = 4 \text{에서 } q = p + 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 에서 $16a^p = \frac{1}{4}a^q$ 이므로 $\textcircled{8}$ 을 대입하면

$$16a^p = \frac{1}{4}a^{p+4}$$

$$64a^p = a^p \times a^4$$

$$a^p > 0 \text{이므로}$$

$$a^4 = 64 = 2^6 \text{에서}$$

$$a = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

정답 ③

11. 출제의도 : 적분과 미분의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고, 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_{-1}^x f(t)dt = xf(x) - 2x^3 - 3x^2 + 6 \quad \cdots \textcircled{7}$$

⑦의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$0 = -f(-1) + 2 - 3 + 6$$

$$f(-1) = 5 \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑦의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 - 6x$$

$$xf'(x) = 6x^2 + 6x$$

$x \neq 0$ 일 때 $f'(x) = 6x + 6$ 이다.

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 도함수 $f'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (6x + 6) = 6$$

즉, 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) = 6x + 6$$

$$f(x) = \int (6x + 6)dx = 3x^2 + 6x + C \quad (\text{단,}$$

C 는 적분상수)

⑧에서 $f(-1) = 5$ 이므로

$$3 - 6 + C = 5, \quad C = 8$$

따라서 $f(0) = 8$

정답 ③

12. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \cos(\angle BAC) \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{8} \\ &= 36 \end{aligned}$$

이므로 $\overline{BC} = 6$

$$\sin^2(\angle BAC) = 1 - \cos^2(\angle BAC)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{63}{64}$$

이고 $\angle BAC$ 는 삼각형의 내각이므로

$$\sin(\angle BAC) = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2R \text{에서}$$

$$2R = \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{16}{\sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

두 삼각형 ABC와 CBD의 외접원이 일치하므로 삼각형 CBD의 외접원의 반지름의 길이도 R 이고 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 2R \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= 2R \sin(\angle BCD) \\ &= \frac{16\sqrt{7}}{7} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

정답 ④

13. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 6이고 $f(0)=0$ 이므로

$f(x)=6x(x-t)$ 라 하면

$$\int_0^2 6x(x-t)dx = \left[2x^3 - 3tx^2 \right]_0^2 = 16 - 12t = 4$$

에서 $t=1$

즉 $f(x)=6x(x-1)$ 이다.

ㄱ

$$\int_0^2 |f(x)|dx = \int_0^2 |6x(x-1)|dx$$

$$= \int_0^1 \{-6x(x-1)\}dx + \int_1^2 6x(x-1)dx$$

$$= [-2x^3 + 3x^2]_0^1 + [2x^3 - 3x^2]_1^2$$

$$= 1 + 5 = 6 \quad (\text{참})$$

ㄴ. 일차함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)=0$ 이

므로

0이 아닌 실수 m 에 대하여

$g(x)=m(x-1)$ 이라 하면

$$\int_0^2 (f(x)+g(x))dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx$$

에서

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 m(x-1)dx$$

$$= m \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^2 = 0$$

이므로 $\int_0^2 f(x)dx = 4$ 이므로

$$\int_0^2 (f(x)+g(x))dx = 4 \quad (\text{참})$$

ㄷ. 조건에서 $\int_0^2 f(x)dx = 4$ 이므로

$$\int_0^2 (f(x)+h(x))dx$$

$$= \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 h(x)dx$$

$$= 4 + \int_0^2 h(x)dx = 4$$

에서

$$\int_0^2 h(x)dx = 0$$

함수 $h(x)$ 가 일차함수이므로 ㄴ에 의하여

0이 아닌 실수 a 에 대하여

$h(x)=a(x-1)$ 이라 하자.

$$f(x)+h(x) = 6x(x-1) + a(x-1)$$

$$= (6x+a)(x-1)$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{에서 } \int_0^2 |f(x)+h(x)|dx > 6 \text{임}$$

을 보이자.

$a > 0$ 일 때 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$$|(6x+a)(x-1)| = (6x+a)|x-1|$$

$$= 6x|x-1| + a|x-1|$$

$$= |f(x)| + a|x-1|$$

$$\int_0^2 |f(x)+h(x)|dx$$

$$= \int_0^2 |f(x)|dx + \int_0^2 |a(x-1)|dx$$

이므로

$$\int_0^2 |a(x-1)|dx$$

$$= a \left\{ \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx \right\}$$

$$= a \left\{ \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 \right\}$$

$$= a$$

이므로

$$\int_0^2 |f(x)+h(x)|dx = 6 + a > 6$$

따라서 조건을 만족시키는 일차함수

$h(x)$ 가 존재한다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

14. 출제의도 : 거듭제곱근의 성질을 활용하여 주어진 식의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = F(n) \text{ 이라 하자.}$$

함수 $f(x)$ 의 정의에 의하여

(i) $\sqrt[3]{k}$ 가 자연수, 즉 k 가 어떤 자연수의 세제곱꼴일 때

$$f(\sqrt[3]{k}) = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}}{5 \times \frac{1}{k}} = \frac{k^{\frac{2}{3}}}{5}$$

(ii) $\sqrt[3]{k}$ 가 자연수가 아닐 때, 즉 k 가 어떤 자연수의 세제곱꼴이 아닐 때

$$f(\sqrt[3]{k}) = 5 \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = \frac{5}{5 \times \frac{1}{k}} = k$$

(i)에서 k 가 어떤 자연수의 세제곱꼴, 즉 $k = m^3$ (m 은 자연수)이면

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = \frac{m^2}{5}$$

(ii)에서 k 가 어떤 자연수의 세제곱꼴이 아니면 $\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}$ 의 값은 항상 자연수이다. …… (*)

$$\text{즉, } F(n) = \sum_{k=1}^n \frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} \text{의 값이 자연수가}$$

되도록 하는 자연수 n 의 값을 구하기 위해서는 n 이 어떤 자연수의 세제곱꼴이 될 때를 기준으로 경우를 나누어 살펴보아야 한다.

① $n = 1 (= 1^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{1})}{5f(1)} = \frac{1^2}{5} = \frac{1}{5} \text{ 이다.}$$

그러므로 (*)에 의하여 $1 \leq n < 8$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $F(n)$ 의 값은

$\frac{1}{5} + (\text{자연수})$ 의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

② $n = 8 (= 2^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{8})}{5f(8)} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5} \text{ 이다.}$$

즉, $F(8)$ 의 값은 $\frac{1}{5} + (\text{자연수}) + \frac{4}{5}$ 의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $8 \leq n < 27$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $F(n)$ 의 값은 자연수이다.

③ $n = 27 (= 3^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{27})}{5f(27)} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} \text{ 이다.}$$

즉, $F(27)$ 의 값은 $(\text{자연수}) + \frac{9}{5}$ 의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

그러므로 (*)에 의하여 $27 \leq n < 64$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $F(n)$ 의 값은

$(\text{자연수}) + \frac{4}{5}$ 의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

④ $n = 64 (= 4^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{64})}{5f(64)} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} \text{ 이다.}$$

즉, $F(64)$ 의 값은 (자연수) $+\frac{4}{5}+\frac{16}{5}$ 의

꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $64 \leq n < 125$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $F(n)$ 의 값은 자연수이다.

⑤ $n=125(=5^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{125})}{5f(125)} = \frac{5^2}{5} = 5 \text{이다.}$$

즉, $F(125)$ 의 값은 (자연수) $+5$ 의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (*)에 의하여 $125 \leq n < 216$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $F(n)$ 의 값은 자연수이다.

⑥ $n=216(=6^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{216})}{5f(216)} = \frac{6^2}{5} = \frac{36}{5} \text{이다.}$$

즉, $F(216)$ 의 값은 (자연수) $+\frac{36}{5}$ 의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

이때 $7^3=343>300$ 이므로 (*)에 의하여 $216 \leq n \leq 300$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $F(n)$ 의 값은 (자연수) $+\frac{36}{5}$ 의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

① ~ ⑥에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 n 의 값의 범위는

$$8 \leq n < 27 \text{ 또는 } 64 \leq n < 216$$

이고, 그 개수는

$$(27-8)+(216-64)=19+152=171$$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인

이차함수이므로

$$f(x)=x^2+px+q(\text{단, } p, q \text{는 상수})$$

라 하자.

$$g(x)=f(x)+f(x-t) \text{라 하면}$$

$$g(x)=x^2+px+q+(x-t)^2+p(x-t)+q$$

$$=2x^2+2(p-t)x+t^2-pt+2q$$

이다.

모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x+1)f(x)}{f(x)+f(x-t)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x+1)f(x)}{g(x)}$$

의 극한이 존재하기 위해서는 분모의

$g(x)=0$ 인 실수 x 가 존재하지 않거나

$g(x)=0$ 인 실수 x 에 대하여 분자의 값이

모두 0이 되어야 한다. 이때 방정식

$g(x)=0$ 이 중근을 가지면 분자도 그 근을 중근으로 가져야 한다.

x 에 대한 이차방정식 $g(x)=0$ 의

판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (p-t)^2 - 2(t^2 - pt + 2q) = p^2 - 4q - t^2$$

이고 D 의 부호에 따라 주어진 극한이 존재하는 t 의 값의 범위를 구할 수 있다.

(i) $D < 0$ 인 경우

$g(x)=0$ 인 실수 x 가 존재하지

않으므로 모든 실수 a 에 대하여

주어진 극한이 존재한다.

(ii) $D > 0$ 인 경우

$g(x)=0$ 인 실수 x 의 값은 2개가

존재하고 t 의 값에 따라 변한다.

하지만 분자의 방정식

$(2x+1)f(x)=0$ 의 근은 t 와 관계없는

상수이고 서로 다른 실근의 개수는 3

이하이다. 이때 t 의 값이 변함에 따라

달라지는 방정식 $g(x)=0$ 의 근이
고정된 방정식 $(2x+1)f(x)=0$ 의 근과
일치할 수 없으므로 조건을
만족시키지 않는다.

(iii) $D=0$ 인 경우

$g(x)$ 는 완전제곱식이고 방정식
 $g(x)=0$ 의 근을 방정식
 $(2x+1)f(x)=0$ 도 중근으로 가져야
한다.

(i), (ii), (iii)에서 $t \geq \frac{3}{2}$ 에서 주어진

극한이 존재하기 위해서는 $t = \frac{3}{2}$ 일 때

$D=0$ 이고 $t > \frac{3}{2}$ 일 때 $D \leq 0$ 이어야
한다.

$$p^2 - 4q - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \text{에서}$$

$$p^2 - 4q = \frac{9}{4} \quad \cdots \textcircled{7}$$

$t = \frac{3}{2}$ 일 때 방정식 $g(x)=0$ 이 중근을
가지고 그 중근은

$$x = -\frac{p - \frac{3}{2}}{2} = \frac{3-2p}{4}$$

이다.

이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식

$$p^2 - 4q = \frac{9}{4} > 0$$

이므로 이차방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른
두 실근을 갖고, 방정식

$(2x+1)f(x)=0$ 이 중근을 갖기 위해서는

$$x = -\frac{1}{2} \text{이 중근이고 } f\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \text{이어야}$$

한다.

$$\frac{3-2p}{4} = -\frac{1}{2} \text{에서 } p = \frac{5}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \text{에서}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)p + q = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + q = 0$$

$$\text{이므로 } q = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 + \frac{5}{2}x + 1 \text{이므로}$$

$$f(2) = 2^2 + \frac{5}{2} \times 2 + 1 = 10$$

정답 ④

16. 출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있
는가?

정답풀이 :

$$\log_3(x-3) = \log_9(2x-3)$$

에서 진수 조건에 의하여

$$x-3 > 0, 2x-3 > 0$$

$$\text{즉, } x > 3$$

$$\log_3(x-3) = \log_9(x-3)^2$$

이므로

$$\log_9(x-3)^2 = \log_9(2x-3)$$

에서

$$(x-3)^2 = 2x-3$$

$$x^2 - 6x + 9 = 2x - 3$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x-2)(x-6) = 0$$

$$x > 3 \text{이므로}$$

$$x = 6$$

정답 6

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 2x \text{에서} \\ f(x) &= \int (6x^2 - 2x) dx \\ &= 2x^3 - x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수}) \\ f(0) &= 10 \text{에서 } C = 10 \\ \text{따라서 } f(x) &= 2x^3 - x^2 + 10 \text{이므로} \\ f(1) &= 2 - 1 + 10 = 11 \end{aligned}$$

정답 11

18. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} a_1 &= 28 \text{로 짝수이므로} \\ a_2 &= \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \times 28 = 14 \\ a_2 &= 14 \text{로 짝수이므로} \\ a_3 &= \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \times 14 = 7 \\ a_3 &= 7 \text{로 홀수이므로} \\ a_4 &= 2a_3 + 12 = 2 \times 7 + 12 = 26 \\ a_4 &= 26 \text{으로 짝수이므로} \\ a_5 &= \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2} \times 26 = 13 \\ a_5 &= 13 \text{으로 홀수이므로} \\ a_6 &= 2a_5 + 12 = 2 \times 13 + 12 = 38 \end{aligned}$$

정답 38

19. 출제의도 : 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 - x + 2 \text{라 하면} \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x - 1 \\ \text{직선과 곡선이 접하는 점의 } x \text{좌표를 } t \text{라 하면} \\ f'(t) &= 3t^2 - 6t - 1 = 8 \text{에서} \\ 3t^2 - 6t - 9 &= 0, \quad 3(t+1)(t-3) = 0 \\ t &= -1 \text{ 또는 } t = 3 \\ \text{기울기가 8이고 } y \text{절편이 양수인 직선의} \\ \text{방정식을 } y &= 8x + a (a \text{는 } a > 0 \text{인 상수)라 하면} \\ \text{(i) } t &= -1 \text{일 때} \\ f(-1) &= (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - (-1) + 2 = -1 \\ \text{이므로} \\ -1 &= 8 \times (-1) + a, \quad a = 7 \\ \text{(ii) } t &= 3 \text{일 때} \\ f(3) &= 3^3 - 3 \times 3^2 - 3 + 2 = -1 \text{이므로} \\ -1 &= 8 \times 3 + a, \quad a = -25 \text{이고 이는 조건을 만족시키지 않는다.} \\ \text{(i), (ii)에 의하여 구하는 직선의 방정} \\ \text{식은 } y &= 8x + 7 \\ \text{이 직선이 점 } (1, k) &\text{를 지나므로} \\ k &= 8 \times 1 + 7 = 15 \end{aligned}$$

정답 15

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 을 E라 하자.

곡선 $y=g(x)$ 가 점 E를 지나고, 두 점 A, D가 점 E에 대하여 대칭이므로

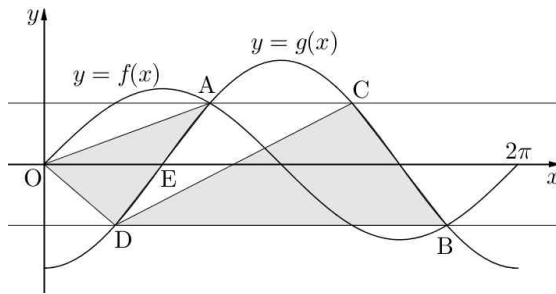
점 A의 x 좌표를 a 라 하면

점 D의 x 좌표는 $\pi-a$ 이다.

또, 두 점 B, D는 직선 $x=\pi$ 에 대하여 대칭이므로 점 B의 x 좌표는 $\pi+a$ 이다.

즉, 두 점 B, D의 좌표는 다음과 같다.

$B(\pi+a, -\sin a)$, $D(\pi-a, -\sin a)$



삼각형 CDB의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{DB} \times 2\sin a &= \frac{1}{2} \times 2a \times 2\sin a \\ &= 2a \sin a \end{aligned}$$

선분 AD가 x 축과 만나는 점이 E이므로 삼각형 AOD의 넓이는 삼각형 AOE와 삼각형 ODE의 넓이의 합과 같다.

즉

(삼각형 AOD의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OE} \times \sin a + \frac{1}{2} \times \overline{OE} \times \sin a$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \sin a \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \sin a$$

(삼각형 AOD의 넓이)

$$= \frac{5}{14} \times (\text{삼각형 CDB의 넓이})$$

이므로

$$\frac{\pi}{2} \sin a = \frac{5}{14} \times 2a \sin a$$

에서 $a = \frac{7}{10}\pi$ 이다.

따라서 $k = -\tan\left(\frac{7}{10}\pi\right)$ 이다.

이때

$$p(a) = \pi + a, \quad q(a) = \pi - a, \quad \alpha = \frac{7}{10}\pi$$

이므로

$$p(\alpha) = p\left(\frac{7}{10}\pi\right) = \pi + \frac{7}{10}\pi = \frac{17}{10}\pi$$

$$q(\alpha) = q\left(\frac{7}{10}\pi\right) = \pi - \frac{7}{10}\pi = \frac{3}{10}\pi$$

따라서

$$3 \times \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = 3 \times \frac{\frac{17}{10}\pi}{\frac{3}{10}\pi} = 17$$

정답 17

21. 출제의도 : 함수의 미분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 중근을 α , 다른 한 근을 β 라 하면

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$$

$$x < \beta, \quad x \neq \alpha \text{에서 } f(x) < 0$$

$$x \geq \beta \text{에서 } f(x) \geq 0$$

$$f(\alpha) = 0 \text{이므로}$$

조건 (나)에서

$$g(x) = \begin{cases} -(x-\alpha)^2(x-\beta) & (x \geq \beta) \\ 7(x-\alpha)^2(x-\beta) & (x < \beta) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{g(x) - g(\beta)}{x - \beta}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{7(x - \alpha)^2(x - \beta)}{x - \beta}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \beta^-} 7(x - \alpha)^2$$

$$= 7(\beta - \alpha)^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{g(x) - g(\beta)}{x - \beta}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{-(x - \alpha)^2(x - \beta)}{x - \beta}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \beta^+} \{-(x - \alpha)^2\}$$

$$= -(\beta - \alpha)^2$$

$\alpha \neq \beta$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{g(x) - g(\beta)}{x - \beta} \neq \lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{g(x) - g(\beta)}{x - \beta} \text{가}$$

되어 함수 $g(x)$ 는 $x = \beta$ 에서만 미분가능하지 않다.⊖

$p(x) = (x - 1)(x - a)(x - 4 + a)$ 라 하면

방정식 $p(x) = 0$ 의 실근은

$$x = 1 \text{ 또는 } x = a \text{ 또는 } x = 4 - a$$

$1 = a = 4 - a$ 가 될 수 없으므로

함수 $|p(x)|$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 1 이상 3 이하이다.⊖

조건 (나)에서 함수 $h(x) = g(x) + |p(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 ⊖, ⊖에서 두 함수 $g(x)$, $|p(x)|$ 는 $x = \beta$ 에서만 미분가능하지 않아야 한다.

함수 $|p(x)|$ 가 $x = \beta$ 에서만 미분가능하지 않아야 하므로

$$1 = a \text{ 또는 } a = 4 - a \text{ 또는 } 4 - a = 1$$

즉, $a = 1$ 또는 $a = 2$ 또는 $a = 3$ 이다.

(i) $a = 1$ 또는 $a = 3$ 인 경우

$$p(x) = (x - 1)^2(x - 3) \text{ 이고}$$

함수 $|p(x)|$ 는 $x = 3$ 에서만 미분가능하지 않으므로

$$\beta = 3$$

$$f(x) = (x - \alpha)^2(x - 3)$$

조건 (나)에서 함수 $h(x)$ 가 $x = 3$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{h(x) - h(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{7(x - \alpha)^2(x - 3) - (x - 1)^2(x - 3)}{x - 3}$$

$$= 7(3 - \alpha)^2 - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{h(x) - h(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-(x - \alpha)^2(x - 3) + (x - 1)^2(x - 3)}{x - 3}$$

$$= -(3 - \alpha)^2 + 4$$

$$7(3 - \alpha)^2 - 4 = -(3 - \alpha)^2 + 4$$

$$(3 - \alpha)^2 = 1$$

$$\alpha = 2 \text{ 또는 } \alpha = 4$$

$$f(0) = -3\alpha^2 \text{ 이므로}$$

$$f(0) \text{의 값은 } -12 \text{ 또는 } -48$$

(ii) $a = 2$ 인 경우

$$p(x) = (x - 2)^2(x - 1) \text{ 이고}$$

함수 $|p(x)|$ 는 $x = 1$ 에서만 미분가능하지 않으므로

$$\beta = 1$$

$$f(x) = (x - \alpha)^2(x - 1)$$

조건 (나)에서 함수 $h(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{7(x - \alpha)^2(x - 1) - (x - 2)^2(x - 1)}{x - 1}$$

$$= 7(1 - \alpha)^2 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x - \alpha)^2(x - 1) + (x - 2)^2(x - 1)}{x - 1}$$

$$= -(1 - \alpha)^2 + 1$$

$$7(1-\alpha)^2 - 1 = -(1-\alpha)^2 + 1$$

$$(1-\alpha)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \alpha = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = -\alpha^2 \text{ 이므로}$$

$$f(0) \text{의 값은 } -\frac{1}{4} \text{ 또는 } -\frac{9}{4}$$

(i), (ii)에서 $f(0)$ 의 최댓값은 $-\frac{1}{4}$, 최
솟값은 -48 이므로 최댓값과 최솟값의
곱은

$$-\frac{1}{4} \times (-48) = 12$$

정답 12

22. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의
그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있
는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^2 - \frac{7}{2}x + 3,$$

$$g(x) = 2x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{15}{2}$$

라 하고, 네 점 A, B, C, D의 좌표를
각각

$$A(r, f(r)), B(s, f(s)), C(u, g(u)),$$

$$D(v, g(v)) \quad (r < s)$$

라 하자.

직사각형 ABCD에서 두 직선 AB, CD가
서로 평행하므로

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} = \frac{g(v) - g(u)}{v - u}$$

$$\frac{2(s^2 - r^2) - \frac{7}{2}(s - r)}{s - r}$$

$$= \frac{2(v^2 - u^2) - \frac{15}{2}(v - u)}{v - u}$$

$$2(s + r) - \frac{7}{2} = 2(v + u) - \frac{15}{2}$$

$$u + v = r + s + 2 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

또, 직사각형 ABCD에서 두 선분 AC,
BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{r + u}{2} = \frac{s + v}{2}$$

$$u - v = s - r \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서

$$u = s + 1, \quad v = r + 1$$

한편, $g(x) = f(x - 1) - 1$ 이므로

$$g(u) = g(s + 1) = f(s) - 1$$

$$g(v) = g(r + 1) = f(r) - 1$$

즉, 두 점 C, D의 좌표는

$$C(s + 1, f(s) - 1), D(r + 1, f(r) - 1)$$

이때 직선 BC의 기울기는

$$\frac{(f(s) - 1) - f(s)}{(s + 1) - s} = -1$$

이고 사각형 ABCD가 직사각형이므로
직선 AB의 기울기는 1이다.

그러므로 두 점 A, B는 상수 k 에
대하여 직선 $y = x + k$ 위에 있다고 할
수 있다.

두 점 $A(r, r + k)$, $B(s, s + k)$ 가 곡선
 $y = a^x$ 위에 있으므로

$$a^r = r + k, \quad a^s = s + k \quad \dots\dots\textcircled{9}$$

점 $C(s + 1, s + k - 1)$ 이

곡선 $y = \log_a \left(x - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}$ 위에 있으므로

$$s + k - 1 = \log_a \left(s + 1 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}$$

$$s+k-\frac{3}{4}=\log_a\left(s+\frac{3}{4}\right) \qquad \qquad \qquad =\left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$s+\frac{3}{4}=a^{s+k-\frac{3}{4}}=a^s\times a^{k-\frac{3}{4}} \qquad \qquad \qquad =\frac{81}{16}$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

에서 $p=16$, $q=81$ 이므로

$$p+q=16+81=97$$

$$s+\frac{3}{4}=(s+k)\times a^{k-\frac{3}{4}} \quad \dots\dots\textcircled{\text{㉠}}$$

정답 97

점 $D(r+1, r+k-1)$ 에 대하여 마찬가지로
방법으로 하면

$$r+\frac{3}{4}=(r+k)\times a^{k-\frac{3}{4}} \quad \dots\dots\textcircled{\text{㉡}}$$

㉠에서 ㉡을 빼면

$$s-r=(s-r)\times a^{k-\frac{3}{4}}$$

$s\neq r$ 이므로

$$a^{k-\frac{3}{4}}=1$$

$$\text{즉, } k=\frac{3}{4}$$

그러므로 두 점 A, B는 곡선

$$y=2x^2-\frac{7}{2}x+3 \text{과 직선 } y=x+\frac{3}{4} \text{의}$$

교점이다.

$$2x^2-\frac{7}{2}x+3=x+\frac{3}{4}$$

$$8x^2-18x+9=0$$

$$(2x-3)(4x-3)=0$$

$$x=\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{4}$$

$$r<s \text{이므로 } r=\frac{3}{4}, s=\frac{3}{2}$$

$$\text{즉, 점 A의 좌표가 } \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) \text{이고 이}$$

점이 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$$a^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$$

따라서

$$a^3=\left(\frac{3}{2}\right)^4$$

■ [선택: 확률과 통계]

23. ① 24. ④ 25. ⑤ 26. ② 27. ③
28. ⑤ 29. 190 30. 170

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

정답 ①

24. 출제의도 : 조건부확률의 뜻과 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(B|A) = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \dots \text{㉠}$$

$$P(A^C) = \frac{2}{5} \text{에서 } 1 - P(A) = \frac{2}{5} \text{이므로}$$

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

㉠에 대입하면

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} \times P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

정답 ④

25. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r \times (2x^3)^{4-r} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$= {}_4C_r \times 2^{4-r} \times x^{12-5r}$$

(단, $r=0, 1, 2, 3, 4$)

x^2 의 계수는 $r=2$ 일 때이므로

$${}_4C_2 \times 2^{4-2} = 6 \times 4 = 24$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 모든 경우의 수는

$$6^2 = 36$$

이때 a 가 3 이하인 사건을 E , $a \times b$ 가 8의 배수인 사건을 F 라 하면 구하는 확률은 $P(E \cup F)$ 이다.

(i) 사건 E 가 일어나는 경우는 a 는 1, 2, 3 중 하나, b 는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나인 경우이므로

$$3 \times 6 = 18$$

$$\text{그러므로 } P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

(ii) 사건 F 가 일어나는 경우는 순서쌍 (a, b) 가 $(2, 4), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 4)$ 인 5가지 경우이므로

$$P(F) = \frac{5}{36}$$

(iii) 사건 $E \cap F$ 가 일어나는 경우는 순서쌍 (a, b) 가 $(2, 4)$ 인 한 가지 경우뿐이므로

$$P(E \cap F) = \frac{1}{36}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{36} - \frac{1}{36} \\ &= \frac{11}{18} \end{aligned}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 표준정규분포표를 이용하여 정규분포를 따르는 확률변수에 대한 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

정규분포 $N(1, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 에 대하여 $Z = \frac{X-1}{\sigma}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
이때

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2}\sigma \leq X \leq 2\sigma\right) &= P\left(\frac{\frac{3}{2}\sigma - 1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{2\sigma - 1}{\sigma}\right) \\ &= P\left(1.5 - \frac{1}{\sigma} \leq Z \leq 2 - \frac{1}{\sigma}\right) = 0.044 \end{aligned}$$

한편, 표준정규분포표에서

$$\begin{aligned} P(1.5 \leq Z \leq 2) &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.4772 - 0.4332 \\ &= 0.044 \end{aligned}$$

이고,

$$P(-2 \leq Z \leq -1.5) = P(1.5 \leq Z \leq 2)$$

이므로

$$2 - \frac{1}{\sigma} = 2 \quad \text{또는} \quad 2 - \frac{1}{\sigma} = -1.5$$

$$\frac{1}{\sigma} \neq 0 \text{이므로} \quad \frac{1}{\sigma} = 2 + 1.5 = 3.5 = \frac{7}{2}$$

$$\text{즉, } \sigma = \frac{2}{7}$$

따라서 확률변수 X 는 정규분포

$N\left(1, \left(\frac{2}{7}\right)^2\right)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \frac{10}{7}\right) &= P\left(Z \geq \frac{\frac{10}{7} - 1}{\frac{2}{7}}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 \\ &= 0.0668 \end{aligned}$$

정답 ③

28. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

시행을 4번 반복한 후 6장의 카드가 1번째 자리에서부터 차례로 A, A, A, B, B, B가 보이도록 놓여있는 사건을 X , 3번째 시행에서 나온 눈의 수가 6인 사건을 Y 라 하면 구하는 확률은 $P(Y|X)$ 이다.

6장의 카드가 1번째 자리에서부터 차례로 A, A, A, B, B, B가 보이도록 놓여 있는 상태를 AAABBB라고 표기하자.

카드가 처음 나열된 상태 AAABBB에서는 한 번의 시행에서 $k=3$ 일 때만 카드의 나열이 AABABB로 바뀌고 나머지 5가지 경우는 그대로 AAABBB이다.

카드의 나열이 AABABB일 때에는 한 번의 시행에서 $k=2$ 이면 카드의 나열이 ABAABB로 바뀌고, $k=3$ 이면 카드의 나열이 다시 AAABBB가 되고, $k=4$ 이면 카드의 나열이 AABBAB로 바뀌며, 나머지 3가지 경우는 그대로 AABABB이다.

즉, AAABBB에서 시행을 2번 반복한 후 카드의 나열이

AAABBB일 확률은

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{26}{6^2},$$

AABABB일 확률은

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{8}{6^2},$$

$$\text{ABAABB일 확률은 } \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6^2},$$

$$\text{AABBAB일 확률은 } \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6^2}$$

이다.

이때 어떠한 나열에서 특정한 나열로 변할 확률과 그 나열에서 다시 원래의 나열로 돌아올 확률은 항상 같다.

따라서 2번의 시행을 통해 특정한 나열이 될 확률과 그 나열에서 다시 2번의 시행을 통해 원래의 나열로 돌아올 확률이 동일하다.

즉, 이 시행을 4번 반복한 후 카드의 나열이 다시 AAABBB가 되는 확률은 시행을 2번 반복한 후 가능한 나열들의 각

확률들을 제공하여 더한 것과 같으므로

$$\begin{aligned} P(X) &= \left(\frac{26}{6^2}\right)^2 + \left(\frac{8}{6^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6^2}\right)^2 \\ &= \frac{26^2 + 8^2 + 1^2 + 1^2}{6^4} = \frac{742}{6^4} \end{aligned}$$

이제 이 시행을 4번 반복한 후 카드의 나열이 다시 AAABBB가 되는 경우 중에서 3번째 시행에서 나온 눈의 수가 6인 경우를 생각해 보자.

3번째 시행에서 $k=6$ 이면 2번째 시행 후의 나열과 3번째 시행 후의 카드의 나열이 바뀌지 않는다. 그러므로 4번째 시행으로 다시 AAABBB가 되려면 2번째 시행 후의 나열이 AAABBB 또는 AABABB이어야 한다.

$$\text{2번째 시행 후 AAABBB일 확률은 } \frac{26}{6^2},$$

$$\text{3번째 시행에서 } k=6 \text{ 일 확률은 } \frac{1}{6},$$

4번째 시행 후 다시 AAABBB가 될 확률은 $\frac{5}{6}$ 이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{26}{6^2} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{130}{6^4}$$

$$\text{또한, 2번째 시행 후 AABABB일 확률은 } \frac{8}{6^2},$$

$$\text{3번째 시행에서 } k=6 \text{ 일 확률은 } \frac{1}{6},$$

4번째 시행 후 다시 AAABBB가 될 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{8}{6^2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{8}{6^4}$$

그러므로

$$P(X \cap Y) = \frac{130}{6^4} + \frac{8}{6^4} = \frac{138}{6^4}$$

따라서

$$\begin{aligned} P(Y|X) &= \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} \\ &= \frac{\frac{138}{6^4}}{\frac{742}{6^4}} \\ &= \frac{138}{742} = \frac{69}{371} \end{aligned}$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)의 $a+b+c+d=14$ 를 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하자.

$a'=a-1, b'=b-1, c'=c-1, d'=d-1$ 이라 하면

$a'+b'+c'+d'=10$ (단, a', b', c', d' 은 음이 아닌 정수)

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d' 의 모든 순서쌍 (a', b', c', d') 의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 286$$

즉, $a+b+c+d=14$ 를 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 286이다.

조건 (가)를 만족시키는 사건을 전체 사건이라 할 때 (나)에서 $10a \geq d$ 이고 $c < d^2$ 인 사건의 여사건은 $10a < d$ 이거나 $c \geq d^2$ 인 사건이다.

$10a < d$ 인 사건을 A , $c \geq d^2$ 인 사건을 B 라 하자.

사건 A 가 일어나는 경우의 수를 구하자.

$a \geq 1$ 이므로 $10a \geq 10$ 이고, 부등식

$10a < d$ 를 만족하려면 $d > 10$ 이어야 한다. ㉠

a, b, c 가 자연수이므로 $a+b+c \geq 3$ 이고, $a+b+c+d=14$ 에서 d 의 최댓값은 11이다. ㉡

㉠, ㉡에서 $d=11$ 이고 이때 $a+b+c=3$ 이 되어 순서쌍 (a, b, c, d) 는 $(1, 1, 1, 11)$ 으로 유일하다.

즉, 사건 A 가 일어나는 경우의 수는 1이다.

사건 B 가 일어나는 경우의 수를 d 의 값에 따라 경우를 나누어 구하자.

(i) $d=1$ 일 때 : $c \geq d^2$ 에서 $c \geq 1$

$a+b+c+d=14$, 즉 $a+b+c=13$ 에서

$$a'=a-1, b'=b-1, c'=c-1$$

이라 하면 a', b', c' 는 모두 음이 아닌 정수이고 $a'+b'+c'=10$ 이므로 이를 만족시키는 a', b', c' 의 모든 순서쌍 (a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$$

(ii) $d=2$ 일 때 : $c \geq d^2$ 에서 $c \geq 4$

$a+b+c+d=14$, 즉 $a+b+c=12$ 에서

$$a'=a-1, b'=b-1, c'=c-4$$

라 하면 a', b', c' 는 모두 음이 아닌 정수이고 $a'+b'+c'=6$ 이므로 이를 만족시키는 a', b', c' 의 모든 순서쌍 (a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

(iii) $d=3$ 일 때 : $c \geq d^2$ 에서 $c \geq 9$

$a+b+c+d=14$, 즉 $a+b+c=11$ 에

서

$$a' = a - 1, b' = b - 1, c' = c - 9$$

라 하면 a', b', c' 는 모두 음이 아닌 정수이고 $a' + b' + c' = 0$ 이므로 이를 만족시키는 a', b', c' 의 모든 순서쌍 (a', b', c') 의 개수는 $(0, 0, 0)$ 으로 1

(iv) $d \geq 4$ 일 때 : $c \geq d^2$ 에서 $c \geq 16$

$a + b + c + d = 14$ 를 만족시키는 자연수 c 는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 사건 B 가 일어나는 경우의 수는

$$66 + 28 + 1 = 95$$

사건 A 가 일어나는 유일한 경우인 $(1, 1, 1, 11)$ 은 $c = 1, d = 11$ 이므로 $c \geq d^2$ 를 만족시키지 않는다.

즉, $n(A \cap B) = 0$ 이므로

$$n(A \cup B) = 1 + 95 = 96$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$286 - 96 = 190$$

정답 190

30. 출제의도 : 표본평균의 평균과 분산을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

숫자 0, 1, 2가 각각 하나씩 적혀 있는 세 개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X 라 하면 X 의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} - 1^2 \\ &= \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

이때 확률변수 $\bar{X}$ 는 크기가 5인 표본의 표본평균이므로

$$E(\bar{X}) = E(X) = 1$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

한편,

$\bar{X}$ 가 가질 수 있는 값은 $0 \leq k \leq 10$ 인

정수 k 에 대하여 $\frac{k}{5}$ 이므로

$$E(\bar{X}^2) = \sum_{k=0}^{10} \left\{ \left(\frac{k}{5} \right)^2 \times P\left(\bar{X} = \frac{k}{5}\right) \right\}$$

이고,

$$\begin{aligned} E(\bar{X}^2) &= V(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2 \\ &= \frac{2}{15} + 1 = \frac{17}{15} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{10} \left(k^2 \times P\left(\bar{X} = \frac{k}{5}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{10} \left(k^2 \times P\left(\bar{X} = \frac{k}{5}\right) \right) \\ &= 25 \sum_{k=0}^{10} \left\{ \left(\frac{k}{5} \right)^2 \times P\left(\bar{X} = \frac{k}{5}\right) \right\} \\ &= 25 \times E(\bar{X}^2) \\ &= 25 \times \frac{17}{15} = \frac{85}{3} = a \end{aligned}$$

이므로

$$6 \times a = 6 \times \frac{85}{3} = 170$$

정답 170

■ [선택: 미적분]

23. ④ 24. ① 25. ③ 26. ② 27. ⑤
28. ④ 29. 81 30. 49

23. 출제의도 : 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(2x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

정답 ④

24. 출제의도 : 부분적분법을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (3x+1)e^x dx \\ &= [(3x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 3e^x dx \\ &= (4e-1) - [3e^x]_0^1 \\ &= (4e-1) - (3e-3) \\ &= e+2\end{aligned}$$

정답 ①

25. 출제의도 : 등비수열의 수렴 조건을 이용하여 공비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{k^2-20}{16}$ 인 등비수열

이므로 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하기 위해서는

$$-1 < \frac{k^2-20}{16} \leq 1 \text{ 이어야 한다.}$$

$$-1 < \frac{k^2-20}{16} \leq 1 \text{ 에서}$$

$$-16 < k^2-20 \leq 16, 4 < k^2 \leq 36$$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 k 의 값은 $\pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ 이고, 그 개수는 8이다.

정답 ③

26. 출제의도 : 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y = \frac{2}{x^2+x}$ 에서 몫의 미분법에 의하여

$$y' = \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

곡선 $y = \frac{2}{x^2+x} (x > 0)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에

서의 접선 l 의 기울기는

$$\frac{-2 \times 3}{4} = -\frac{3}{2}$$

그러므로 직선 l 의 방정식은

$$y = -\frac{3}{2}(x-1) + 1$$

$$\text{즉, } y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

따라서 곡선 $y = \frac{2}{x^2+x} (x > 0)$ 과

직선 l 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \left| \frac{2}{x^2+x} - \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right| dx \\ &= \int_1^2 \left\{ \frac{2}{x(x+1)} - \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right\} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \right) dx \\ &= \left[2\ln x - 2\ln(x+1) + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x \right]_1^2 \\ &= (2\ln 2 - 2\ln 3 + 3 - 5) - \left(-2\ln 2 + \frac{3}{4} - \frac{5}{2} \right) \\ &= 2(2\ln 2 - \ln 3) - \frac{1}{4} \\ &= 2\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= (\ln x)^3 - 3\ln x \text{에서 } f(1) = 0 \text{이므로} \\ h(x) &= g(f(x)) \text{에서} \\ h'(x) &= g'(f(x))f'(x) \\ h'(1) &= g'(f(1))f'(1) \\ &= g'(0) \times f'(1) \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

한편 $f(x) = 0$ 에서

$$\ln x \{ (\ln x)^2 - 3 \} = 0$$

$$\ln x = 0 \text{ 또는 } \ln x = \sqrt{3} \text{ 또는 } \ln x = -\sqrt{3}$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = e^{\sqrt{3}} \text{ 또는 } x = e^{-\sqrt{3}}$$

$t \geq e$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$$g(f(t)) = t^2$$

$$t \geq e \text{일 때 } f(t) \geq -2 \text{이므로}$$

$t > e$ 에서 위 등식의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$g'(f(t))f'(t) = 2t \quad \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(\ln x)^2 \times \frac{1}{x} - \frac{3}{x} \\ &= \frac{3}{x} \{ (\ln x)^2 - 1 \} \end{aligned}$$

이고,

$$f(t) = 0 \text{에서 } t > e \text{이므로 } t = e^{\sqrt{3}}$$

$$f'(e^{\sqrt{3}}) = \frac{3}{e^{\sqrt{3}}} \times (\sqrt{3}^2 - 1) = \frac{6}{e^{\sqrt{3}}}$$

②의 양변에 $t = e^{\sqrt{3}}$ 을 대입하면

$$g'(0) \times \frac{6}{e^{\sqrt{3}}} = 2e^{\sqrt{3}}$$

$$g'(0) = \frac{1}{3}e^{2\sqrt{3}}$$

이때 $f'(1) = -3$ 이므로 ⑦에서

$$h'(1) = \frac{1}{3}e^{2\sqrt{3}} \times (-3) = -e^{2\sqrt{3}}$$

정답 ⑤

[참고]

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{3}{x} \{ (\ln x)^2 - 1 \}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\ln x = -1 \text{ 또는 } \ln x = 1$$

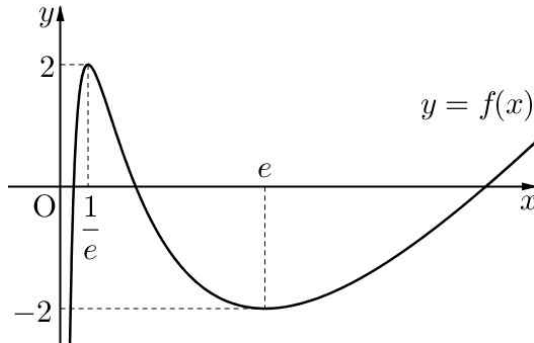
$$x = \frac{1}{e} \text{ 또는 } x = e$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{1}{e}$	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=2, f(e)=-2 \text{이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



즉, $x \geq e$ 일 때 $f(x) \geq -2$ 이다.

28. 출제의도 : 사인법칙, 삼각함수의 덧셈정리, 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

t 는 삼각형 OAP의 넓이에서 부채꼴 OBP의 넓이를 뺀 값이다.

$\angle AOP = \theta$ 라 하면

$\overline{OB} = \overline{OP} = 2, \overline{OA} = 5$ 이고

삼각형 OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times \sin \theta$$

부채꼴 OBP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \theta$$

이므로

$$t = 5 \sin \theta - 2\theta \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 $\angle OAP + \angle AOP = \angle OPQ$ 에서

$$\angle OAP = f(t) - \theta$$

삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{5}{\sin(\pi - f(t))} = \frac{2}{\sin(f(t) - \theta)}$$

$$\sin(f(t) - \theta) = \frac{2}{5} \sin f(t) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$1 = (5 \cos \theta - 2) \frac{d\theta}{dt} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉢의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\cos(f(t) - \theta) \left(f'(t) - \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{2}{5} \cos f(t) \times f'(t) \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

한편 $\tan f(k) = \frac{3}{2}$ 에서

$$\frac{\sin f(k)}{\cos f(k)} = \frac{3}{2}, \sin f(k) = \frac{3}{2} \cos f(k)$$

$$\sin^2 f(k) + \cos^2 f(k) = \frac{13}{4} \cos^2 f(k) = 1$$

$$\cos^2 f(k) = \frac{4}{13}$$

$$0 < f(t) < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\cos f(k) = \frac{2}{\sqrt{13}}, \sin f(k) = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

이를 ㉣에 대입하면

$$\sin(f(k) - \theta) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{6}{5\sqrt{13}} \text{이고}$$

$$\cos(f(k) - \theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{6}{5\sqrt{13}} \right)^2} = \frac{17}{5\sqrt{13}}$$

㉣의 양변에 $t = k$ 를 대입하면

$$\cos(f(k) - \theta) \left(f'(k) - \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{2}{5} \cos f(k) \times f'(k)$$

$$\frac{17}{5\sqrt{13}} \times \left(f'(k) - \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{\sqrt{13}} \times f'(k)$$

$$17 \times \left(f'(k) - \frac{d\theta}{dt} \right) = 4f'(k) \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

$$\textcircled{㉤} \text{에서 } \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5 \cos \theta - 2} \text{이고}$$

$$\sin \theta = \sin(f(k) - (f(k) - \theta))$$

$$= \sin f(k) \cos(f(k) - \theta) - \cos f(k) \sin(f(k) - \theta)$$

에서

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{17}{5\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{6}{5\sqrt{13}} = \frac{3}{5}$$

$\overline{AP} < \overline{AQ}$ 에서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{4}{5} \text{ 이고 } \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5\cos\theta - 2} = \frac{1}{2}$$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$17 \times \left(f'(k) - \frac{1}{2} \right) = 4f'(k)$$

$$17f'(k) - \frac{17}{2} = 4f'(k)$$

$$f'(k) = \frac{17}{26}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하고 등비급수의 합을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$a_1 > 0, a_2 = a_1 r < 0 \text{에서}$$

$$r < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$r \leq -1 \text{이면}$$

$$a_{2n} = a_1 r^{2n-1} \text{에서 } r^{2n-1} \leq -1 \text{ 이므로}$$

$$a_{2n} = -a_1 |r|^{2n-1} \leq -a_1 < 0$$

$$|a_{2n}| \geq 10 \text{ 일 때,}$$

$$b_{2n} = a_{2n} - a_1 \leq -2a_1 < 0$$

$$|a_{2n}| < 10 \text{ 일 때, } b_{2n} = a_{2n}^2 \geq a_1^2 > 0$$

이는 수열 $\{b_n\}$ 이 0에 수렴한다는 조건

을 만족시키지 않는다.

따라서 ㉠에 의하여 $-1 < r < 0$

조건 (가)에서 $(b_2)^2 = 36b_3 \geq 0$ 이므로

$$b_3 \geq 0$$

$$|a_3| \geq 10 \text{ 이면}$$

$$b_3 = a_3 - a_1 = a_1 r^2 - a_1 = a_1 (r^2 - 1)$$

이때 $-1 < r < 0$ 이므로 $b_3 < 0$ 이 되어

$b_3 \geq 0$ 을 만족시키지 않는다.

그러므로 $|a_3| < 10$ 이고 $b_3 = (a_3)^2$

$$|a_2| < 10 \text{ 이면 } b_2 = (a_2)^2, b_3 = (a_3)^2$$

조건 (가)에서

$$(a_2)^4 = 36 \times (a_3)^2$$

$$(a_1 r)^4 = 36 \times (a_1 r^2)^2, a_1^2 = 36$$

$$a_1 > 0 \text{ 이므로 } a_1 = 6$$

$|a_1| < 10$ 이고 $-1 < r < 0$ 이므로 모든 자

연수 n 에 대하여 $|a_n| < 10$

그러므로 $b_n = (a_n)^2$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{36}{1-r^2} > 36 \text{ 이므로 조}$$

건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$\text{즉 } |a_2| \geq 10 \text{ 이고 } |a_1| \geq 10$$

따라서 $|a_1| \geq 10, |a_2| \geq 10, |a_3| < 10$ 이

므로

$$b_1 = a_1 - a_1 = 0$$

$$b_2 = a_2 - a_1 = a_1 (r - 1)$$

$$b_3 = (a_3)^2 = a_1^2 r^4$$

$$\text{조건 (가)에서 } \{a_1 (r - 1)\}^2 = 36 \times a_1^2 r^4$$

$$(r - 1)^2 = 36r^4$$

$$-1 < r < 0 \text{ 이므로}$$

$$r - 1 = -6r^2,$$

$$6r^2 + r - 1 = 0, (3r - 1)(2r + 1) = 0$$

$$-1 < r < 0 \text{ 이므로 } r = -\frac{1}{2}$$

$|a_3| < 10$ 이고 $r = -\frac{1}{2}$ 이므로

$n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$|a_n| < 10$ 이고 $b_n = (a_n)^2$

즉 수열 $\{b_n\}$ 은 셋째항부터 공비가 $\frac{1}{4}$ 인

등비수열을 이룬다.

$$b_3 = (a_3)^2 = a_1^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{a_1^2}{16} \text{이므로}$$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$= b_1 + b_2 + \sum_{n=3}^{\infty} b_n$$

$$= 0 + \left(-\frac{a_1}{2} - a_1\right) + \frac{\frac{a_1^2}{16}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{3a_1}{2} + \frac{a_1^2}{12} = 12$$

$$a_1^2 - 18a_1 - 144 = 0, (a_1 + 6)(a_1 - 24) = 0$$

에서

$$|a_1| \geq 10 \text{이므로 } a_1 = 24$$

따라서

$$36 \times a_4 \times a_6$$

$$= 36 \times \left\{24 \times \left(-\frac{1}{8}\right)\right\} \times \left\{24 \times \left(-\frac{1}{32}\right)\right\} = 81$$

정답 81

30. 출제의도 : 치환적분법과 정적분의 성질 및 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2^{2x + \frac{1}{2} \cos \pi x} \text{에서}$$

$$f'(x) = 2^{2x + \frac{1}{2} \cos \pi x} \times \ln 2 \times \left(2 - \frac{\pi}{2} \sin \pi x\right)$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이다. 즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$$\frac{1}{4} \int_{f(1)}^{f(3)} g(x) dx + \int_{f(0)}^{f(2)} \frac{2^{4g(x)} g'(x)}{x} dx \dots \textcircled{7}$$

$$x = f(t) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

함수 $f(x)$ 는 일대일대응이므로

$$f(1) = f(t) \text{에서 } t = 1$$

$$f(3) = f(t) \text{에서 } t = 3$$

$$\frac{1}{4} \int_{f(1)}^{f(3)} g(x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_1^3 g(f(t)) f'(t) dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_1^3 t f'(t) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left[t f(t) \right]_1^3 - \int_1^3 f(t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{4} (3f(3) - f(1)) - \frac{1}{4} \int_1^3 f(t) dt$$

..... ㉠

또,

$$f(0) = f(t) \text{에서 } t = 0$$

$$f(2) = f(t) \text{에서 } t = 2$$

이고

$$x = f(t) \text{이면}$$

$$g(x) = t, g'(x) \frac{dx}{dt} = 1 \text{이므로}$$

$$\int_{f(0)}^{f(2)} \frac{2^{4g(x)} g'(x)}{x} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{2^{4t}}{f(t)} dt$$

$$= \int_0^2 \frac{2^{4t}}{2^{2t + \frac{1}{2} \cos \pi t}} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 2^{2t - \frac{1}{2} \cos \pi t} dt \\
&= \int_1^3 2^{2(t-1) - \frac{1}{2} \cos \pi(t-1)} dt \\
&= \int_1^3 2^{-2+2t + \frac{1}{2} \cos \pi t} dt \\
&= \frac{1}{4} \int_1^3 2^{2t + \frac{1}{2} \cos \pi t} dt \\
&= \frac{1}{4} \int_1^3 f(t) dt
\end{aligned}$$

..... ㉠

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \int_{f(1)}^{f(3)} g(x) dx + \int_{f(0)}^{f(2)} \frac{2^{4g(x)} g'(x)}{x} dx \\
&= \frac{1}{4} (3f(3) - f(1)) - \frac{1}{4} \int_1^3 f(t) dt \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_1^3 f(t) dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} (3f(3) - f(1))$$

$$= \frac{1}{4} \left(3 \times 2^{\frac{11}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} (3 \times 2^5 - 2)$$

$$= \frac{47}{2} \sqrt{2}$$

따라서 $p=2$, $q=47$ 이므로

$$p+q=49$$

정답 49

■ [선택: 기하]

23. ① 24. ② 25. ④ 26. ⑤ 27. ③
28. ② 29. 60 30. 457

23. 출제의도 : 벡터의 합과 실수배를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a} = (k, 2)$, $\vec{b} = (k, 3)$ 이므로

$$\begin{aligned}
2\vec{a} + \vec{b} &= (2k, 4) + (k, 3) \\
&= (3k, 7)
\end{aligned}$$

벡터 $2\vec{a} + \vec{b}$ 의 모든 성분의 합이 10이므로 $3k+7=10$ 에서

$$k=1$$

정답 ①

24. 출제의도 : 좌표공간에서 선분을 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $A(a, -4, 0)$, $B(6, b, 5)$ 를 3:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{18+2a}{3+2}, \frac{3b-8}{3+2}, \frac{15+0}{3+2} \right)$$

이 점과 점 $(4, -1, 3)$ 이 일치하므로

$$\frac{18+2a}{3+2} = 4 \text{에서}$$

$$18+2a=20$$

$$a=1$$

$$\frac{3b-8}{3+2} = -1 \text{에서}$$

$$3b-8=-5$$

$$b=1$$

$$\text{따라서 } a+b=1+1=2$$

정답 ②

25. 출제의도 : 타원의 방정식을 이용하여 두 초점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

단축의 길이가 6이므로 타원과 y 축이 만나는 두 점의 좌표는

$$(0, 3), (0, -3)$$

이 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (a > 0)$$

이라 하면 점 $(4, \sqrt{5})$ 가 타원 위의 점이므로

$$\frac{16}{a^2} + \frac{5}{9} = 1$$

$$a^2 = 36$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 6$$

$$c^2 = a^2 - 9 = 27$$

$$c > 0 \text{ 이므로 } c = 3\sqrt{3}$$

따라서

$$\overline{FF'} = 2c = 6\sqrt{3}$$

정답 ④

26. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이와 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 D에서 선분 AB를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 D'이라 하면

$$\overline{DD'} = 3$$

점 D'은 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이고, 점 C에서 평면 ABD'에 내린 수선의 발이 B이므로

$$\overline{BD'} = \overline{CD} = 2\sqrt{6} \text{ 이다.}$$

$\angle AD'B$ 는 직각이므로 삼각형 ABD'에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AD'} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{3}$$

점 D'에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABD'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{D'H} = \frac{1}{2} \times \overline{AD'} \times \overline{BD'}$$

이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \overline{D'H} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$$

$$\text{즉 } \overline{D'H} = 2\sqrt{2}$$

삼각형 DD'H에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{DH} = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$$

$\overline{DD'} \perp (\text{평면 ABD'})$, $\overline{D'H} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DH} \perp \overline{AB}$ 이고 삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DH} = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{17} = 3\sqrt{17}$$

정답 ⑤

27. 출제의도 : 포물선의 정의와 접선을 이용하여 미지수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점을 F라 하면 $F(p, 0)$ 이고 포물선의 준선은 $x = -p$ 이다.

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AF} = \overline{AH} = 3p$ 이므로 점 A의 x좌표는 $2p$ 이다. 점 A의 y좌표를 y_1 이라 하면

$$y_1^2 = 4p \times 2p = 8p^2$$

이고 $y_1 > 0$ 이므로 $y_1 = 2\sqrt{2}p$

즉, $A(2p, 2\sqrt{2}p)$

포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 A에서의 접선 l 의 방정식은

$$2\sqrt{2}p \times y = 2p(x + 2p)$$

$$\text{즉, } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}p$$

이고 직선 l 이 y 축과 만나는 점 B의 좌표는 $(0, \sqrt{2}p)$ 이다.

직선 l 과 수직이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2\sqrt{2}p = -\sqrt{2}(x - 2p)$$

$$\text{즉, } y = -\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}p$$

이고 이 직선이 y 축과 만나는 점 C의 좌표는 $(0, 4\sqrt{2}p)$ 이다.

$$\overline{BC} = 4\sqrt{2}p - \sqrt{2}p = 3\sqrt{2}p$$

이고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 길이는 $2p$ 이므로 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2}p \times 2p = 3\sqrt{2}p^2 = 16\sqrt{2}$$

$$p^2 = \frac{16}{3} \text{ 이고 } p > 0 \text{ 이므로}$$

$$p = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

정답 ③

28. 출제의도 : 공간좌표를 이용하여 주어진 삼각형의 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

구 S와 평면 ABC가 만나는 도형이 삼각형 ABC의 외접원이므로 삼각형의 외심을 M, 반지름의 길이를 r 이라 하면

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 3$ 이고 직선 OM은 평면 ABC와 수직이다.

$\overline{OM} = h$ 라 하고 좌표공간에서 점 O를 원점, 점 M의 좌표를 $(0, 0, h)$, 점 A의 좌표를 $(r, 0, h)$ 라 하면

$$B\left(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r, h\right), C\left(-\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}r, h\right)$$

$\overline{OA} = 3$ 이므로

$$r^2 + h^2 = 9$$

$$h^2 = 9 - r^2 \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

$\overline{BD} = \overline{CD}$ 이므로 점 D의 y 좌표는 0이고 조건 (가)에서 직선 OD가 평면 $z = h$ 와 서로 평행하므로 점 D의 z 좌표도 0이다.

그러므로 $D(3, 0, 0)$ 또는 $D(-3, 0, 0)$

(i) $D(3, 0, 0)$ 인 경우

$$\overline{BC} = \sqrt{3}r \text{에서}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 = 3r^2$$

$$\text{즉, } \left(3 + \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}r^2 + h^2 = 3r^2$$

이 식에 $\textcircled{\ominus}$ 을 대입하면

$$\left(3 + \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}r^2 + (9 - r^2) = 3r^2$$

$$(r - 3)(r + 2) = 0$$

$r > 0$ 이므로 $r = 3$

㉠에서 $h = 0$ 이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $D(-3, 0, 0)$ 인 경우

$\overline{BC} = \sqrt{3}r$ 에서

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 = 3r^2$$

$$\text{즉, } \left(-3 + \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}r^2 + h^2 = 3r^2$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$\left(-3 + \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}r^2 + (9 - r^2) = 3r^2$$

$$(r-2)(r+3) = 0$$

$r > 0$ 이므로 $r = 2$

㉠에서 $h = \sqrt{5}$

(i), (ii)에서

$A(2, 0, \sqrt{5}), B(-1, \sqrt{3}, \sqrt{5}),$

$C(-1, -\sqrt{3}, \sqrt{5}), D(-3, 0, 0)$

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3} = 2\sqrt{3}$ 이고 점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{BH} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BH} = 2\sqrt{2}$$

$\angle BHC = \theta$ 라 하면 θ 는 두 평면 OAB와 OAC의 이면각이다.

삼각형 BCH에서 코사인법칙을 이용하여

$$\cos \theta = \frac{8+8-12}{2 \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

따라서 삼각형 OAB의 평면 OAC 위로의 정사영의 넓이는

$$3\sqrt{2} \times \cos \theta = 3\sqrt{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

정답 ②

29. 출제의도 : 쌍곡선과 타원의 정의와 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 초점 F, F'이 y축에 대하여 대칭이고 점 P(0, p)가 y축 위의 점이므로 두 점 A, B는 y축에 대하여 대칭이다.

그러므로

$$\overline{BF} = \overline{AF'}, \overline{BP} = \overline{AP}, \overline{PF} = \overline{PF'}$$

두 초점이 A, B인 타원이 두 점 F, P를 지나므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AP} + \overline{BP}$$

$$\text{즉, } \overline{AF} + \overline{AF'} = 2\overline{AP} \dots\dots\textcircled{1}$$

점 A는 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이

므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{AF'} - \overline{AF} = 8 \dots\dots\textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$\overline{AP} = \overline{AF} + 4$$

점 A는 선분 PF 위의 점이므로

$$\overline{PF} = \overline{AP} + \overline{AF} = 2\overline{AF} + 4 \dots\dots\textcircled{3}$$

직선 PC와 직선 FF'는 서로 평행이므로

$$\angle CPF = \angle PFF' \dots\dots\textcircled{4}$$

$$\overline{PF} = \overline{PF'} \text{ 이므로}$$

$$\angle PF'F = \angle PFF' \dots\dots\textcircled{5}$$

조건에서 $\angle APF' = \angle APC$ 이고 ㉢, ㉤에서 삼각형 PFF'은 정삼각형이다.

$$\overline{PF} = \overline{FF'} = 2c, \angle AFF' = \angle PFF' = 60^\circ$$

$$\textcircled{3} \text{에서 } 2c = 2\overline{AF} + 4 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AF} = c - 2$$

㉡에서

$$\overline{AF'} = c + 6$$

삼각형 AFF'에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AF'}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FF'}^2 - 2 \times \overline{AF} \times \overline{FF'} \times \cos 60^\circ$$

$$(c+6)^2 = (c-2)^2 + (2c)^2 - 2 \times (c-2) \times 2c \times \frac{1}{2}$$

$$(c-8)(c+2) = 0$$

$c > 0$ 이므로 $c = 8$

그러므로

$$\overline{AF} = 6, \overline{AF'} = 14, \overline{FF'} = 16, \overline{AP} = 10$$

삼각형 APC와 삼각형 AFF'는 서로 닮음이고 닮음비는

$$\overline{AP} : \overline{AF} = 10 : 6 = 5 : 3$$

그러므로

$$\overline{PC} = \frac{5}{3} \times \overline{FF'} = \frac{5}{3} \times 16 = \frac{80}{3}$$

$$\overline{CA} = \frac{5}{3} \times \overline{AF'} = \frac{5}{3} \times 14 = \frac{70}{3}$$

따라서 삼각형 ACP의 둘레의 길이는

$$\overline{AP} + \overline{PC} + \overline{CA} = 10 + \frac{80}{3} + \frac{70}{3} = 60$$

정답 60

30. 출제의도 : 평면벡터의 성분과 내적을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\angle ABC = \angle BAD < \frac{\pi}{2} \text{이므로 두 직선}$$

AD와 BC는 평행이 아니고,

$\overline{AD} = \overline{BC}$ 이므로 사다리꼴 ABCD는

$\overline{AB} // \overline{CD}$ 인 등변사다리꼴이다.

좌표평면 위에 선분 AB의 중점이 원점,

선분 AB가 x 축 위에 있도록 사다리꼴

ABCD를 그리면 $A(-12, 0)$, $B(12, 0)$ 이고

이 사다리꼴은 y 축에 대하여 대칭이므로

$C(c, h)$, $D(-c, h)$ (단, $c > 0$, $h > 0$)로 놓을 수 있다.

$\overline{AD} = 13\sqrt{2}$ 에서

$$\{-c - (-12)\}^2 + \{h - 0\}^2 = (13\sqrt{2})^2$$

$$(12-c)^2 + h^2 = 338 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$\overline{AB} = (24, 0)$, $\overline{DC} = (2c, 0)$ 에서

$$\overline{AB} \cdot \overline{DC} = 24 \times 2c = 48c$$

$\overline{AD} = (12-c, h)$, $\overline{BC} = (c-12, h)$ 에서

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (12-c)(c-12) + h^2 = -(12-c)^2 + h^2$$

조건 (나)에서

$$48c = -(12-c)^2 + h^2 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 에서 $h^2 = 338 - (12-c)^2$ 을 $\textcircled{B}$ 에

대입하면

$$48c = -(12-c)^2 + \{338 - (12-c)^2\}$$

$$48c = 338 - 2(12-c)^2$$

정리하면 $c^2 = 25$ 이고 $c > 0$ 이므로 $c = 5$

이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$(12-5)^2 + h^2 = 338$$

에서 $h^2 = 289$ 이고 $h > 0$ 이므로 $h = 17$

$\overline{XA} \cdot \overline{XD} = 0$ 에서 점 X는 선분 AD를

지름으로 하는 원 위에 있고,

$\overline{XB} \cdot \overline{XC} = 0$ 에서 점 X는 선분 BC를

지름으로 하는 원 위에 있다.

두 선분 AD, BC의 중점을 각각 O_1 ,

O_2 라 하면

$$O_1\left(-\frac{17}{2}, \frac{17}{2}\right), O_2\left(\frac{17}{2}, \frac{17}{2}\right)$$

이고 $\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = \frac{13\sqrt{2}}{2}$ 이므로 점 X는

두 점 O_1 과 O_2 를 중심으로 하고

반지름의 길이가 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$ 인 두 원의

교점이다. 두 원의 중심은 y 축에 대하여

대칭이고 반지름의 길이가 같으므로 두

원의 교점 X는 y 축 위에 존재한다. 점

X의 좌표를 $(0, k)$ 라 하면

$$\left(\frac{17}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{17}{2}-k\right)^2 = \left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

에서

$$\left(k-\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{338}{4} - \frac{289}{4} = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

이므로

$$k = \frac{17}{2} - \frac{7}{2} = 5 \quad \text{또는} \quad k = \frac{17}{2} + \frac{7}{2} = 12$$

즉 점 X의 좌표는

$(0, 5)$ 또는 $(0, 12)$

이고 이 두 점을 각각 X_1, X_2 라 하면

$$\overrightarrow{AD} = (7, 17), \quad \overrightarrow{AX_1} = (12, 5),$$

$$\overrightarrow{AX_2} = (12, 12) \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AX_2}$$

$$= \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{AX_2})$$

$$= (7, 17) \cdot (24, 17)$$

$$= 7 \times 24 + 17 \times 17$$

$$= 457$$

정답 457