

수학 영역

정답

1	⑤	2	④	3	②	4	③	5	③
6	④	7	④	8	②	9	③	10	⑤
11	④	12	①	13	①	14	⑤	15	②
16	5	17	17	18	13	19	24	20	27
21	117	22	64						

해설

1. [출제의도] 지수와 로그 계산하기

$$4^{\frac{1}{2}} + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

2. [출제의도] 정적분 계산하기

$$\int_0^1 (2x+3)dx = [x^2 + 3x]_0^1 = 1 + 3 = 4$$

3. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - a \\ f'(1) &= 2 - a = 0 \\ \text{따라서 } a &= 2 \end{aligned}$$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \\ \text{따라서 } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

5. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기

$$\begin{aligned} \text{양변의 밑을 5로 같게 하면} \\ 5^{2x-7} \leq 5^{-x+2} \\ 2x-7 \leq -x+2 \text{ 에서 } x \leq 3 \\ \text{주어진 부등식을 만족시키는 자연수 } x \text{ 는} \\ 1, 2, 3 \\ \text{따라서 자연수 } x \text{ 의 개수는 } 3 \end{aligned}$$

6. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) + \sin(\pi + \theta) &= \cos\theta - \sin\theta = \frac{3}{5} \\ (\cos\theta - \sin\theta)^2 &= \cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin\theta\cos\theta \\ 1 - 2\sin\theta\cos\theta &= \frac{9}{25} \\ \text{따라서 } \sin\theta\cos\theta &= \frac{8}{25} \end{aligned}$$

7. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$$\begin{aligned} a_1 &= 10 \text{ 이므로} \\ a_2 &= 5 - \frac{10}{10} = 4 \\ a_3 &= 5 - \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ a_4 &= -2 \times \frac{5}{2} + 3 = -2 \\ a_5 &= 5 - \frac{10}{-2} = 5 + 5 = 10 \\ &\vdots \\ a_9 &= a_5 = a_1 = 10, \quad a_{12} = a_8 = a_4 = -2 \\ \text{따라서 } a_9 + a_{12} &= 8 \end{aligned}$$

8. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

$$\begin{aligned} \text{등비수열 } \{a_n\} \text{ 의 일반항은 } a_n &= ar^{n-1} \\ 2a &= S_2 + S_3 \text{ 이므로} \\ 2a &= (a+ar) + (a+ar+ar^2) \\ ar(2+r) &= 0 \\ r^2 &= 64a^2 \ (a > 0) \text{ 에 의하여} \\ r \neq 0 \text{ 이므로 } r &= -2, \quad a = \frac{1}{4} \\ \text{따라서 } a_5 &= \frac{1}{4} \times (-2)^4 = 4 \end{aligned}$$

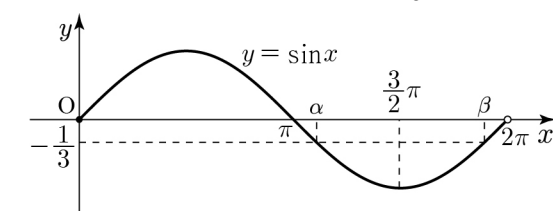
9. [출제의도] 거듭제곱근과 지수법칙 이해하기

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a})^3 &= a^{\frac{3}{n}} \\ \text{(i) } a &= 4 \text{ 일 때 } 4^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{6}{n}} \\ n \ (n \geq 2) \text{ 가 } 6 \text{ 의 양의 약수이어야 하므로} \\ n &= 2, 3, 6 \\ \text{그러므로 } f(4) &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } a &= 27 \text{ 일 때 } 27^{\frac{3}{n}} = 3^{\frac{9}{n}} \\ n \ (n \geq 2) \text{ 가 } 9 \text{ 의 양의 약수이어야 하므로} \\ n &= 3, 9 \\ \text{그러므로 } f(27) &= 9 \\ \text{따라서 } f(4) + f(27) &= 6 + 9 = 15 \end{aligned}$$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \text{ 이므로} \\ 3(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 1 &= 0 \\ 3\sin^2 x - 5\sin x - 2 &= 0 \\ (3\sin x + 1)(\sin x - 2) &= 0 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ 이므로 } \sin x &= -\frac{1}{3} \quad \dots \text{㉠} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{㉠을 만족시키는 } x \text{ 의 값을 } x = \alpha, \beta \ (\alpha < \beta) \text{ 라} \\ \text{하면 } \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{3}{2}\pi \text{ 이므로 } \alpha + \beta = 3\pi \\ \text{따라서 모든 해의 합은 } &3\pi \end{aligned}$$

11. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\begin{aligned} \text{직선 } y = -2 \text{ 와 함수 } y = f(x) \text{ 의 그래프가} \\ \text{만나는 점이 A 이므로} \\ -2 &= \frac{1}{2} \log_a (x-1) - 2 \text{ 에서 } x = 2 \\ A(2, -2) \\ B\left(10, \frac{1}{2} \log_a 9 - 2\right), \quad C(10, -\log_a 8 + 1) \text{ 이고,} \\ \text{점 A 와 직선 } x = 10 \text{ 사이의 거리는 8 이므로} \\ \text{삼각형 ACB 의 넓이는} \\ \frac{1}{2} \times 8 \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \log_a 9 - 2 \right) - (-\log_a 8 + 1) \right\} \\ &= 4 \times (\log_a 24 - 3) = 28 \\ \log_a 24 &= 10 \\ \text{따라서 } a^{10} &= 24 \end{aligned}$$

12. [출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 3x - 5} &= 2 \text{ 이므로} \\ f(x) &= 2x^2 + ax + b \end{aligned}$$

함수 $f(x)g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) &= f(3)g(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x-3} &= 18 + 3a + b \text{ 에서} \\ (\text{분모}) \rightarrow 0 \text{ 이고 극한값이 존재하므로 } (\text{분자}) &\rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + ax + b) &= 0 \text{ 이므로 } 18 + 3a + b = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x-3} &= 0 \\ b &= -3a - 18 \text{ 이므로 } f(x) = (x-3)(2x+a+6) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (2x+a+6) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a = -12, \quad b = 18$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 18 \\ \text{따라서 } f(1) &= 8 \end{aligned}$$

13. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기
주어진 식 (*)에 의하여

$$nS_n = \log_2 (n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \quad \text{㉠}$$

이다. (*)에서 ㉠을 빼서 정리하면

$$\begin{aligned} (n+1)S_{n+1} - nS_n \\ &= \log_2 (n+2) - \log_2 (n+1) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n S_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

이므로

$$\boxed{(n+1)} \times a_{n+1} = \log_2 \frac{n+2}{n+1} \quad (n \geq 2)$$

이다.

$$a_1 = 1 = \log_2 2 \text{ 이고,}$$

$$2S_2 = \log_2 3 + S_1 = \log_2 3 + a_1 \text{ 이므로}$$

$$2a_2 = \log_2 \frac{3}{2}$$

모든 자연수 n 에 대하여

$$na_n = \boxed{\log_2 \frac{n+1}{n}}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n ka_k &= \sum_{k=1}^n \log_2 \frac{k+1}{k} \\ &= \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \dots + \log_2 \frac{n+1}{n} \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n+1}{n} \right) \\ &= \boxed{\log_2 (n+1)} \end{aligned}$$

이다.

$$f(n) = n+1, \quad g(n) = \log_2 \frac{n+1}{n},$$

$$h(n) = \log_2 (n+1)$$

따라서

$$f(8) - g(8) + h(8) = 9 - \log_2 \frac{9}{8} + \log_2 9 = 12$$

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

$$\begin{aligned} \neg. \quad v(t) &= 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \\ t < 2 \text{ 일 때 } v(t) &< 0 \\ t = 2 \text{ 일 때 } v(2) &= 0 \\ t > 2 \text{ 일 때 } v(t) &> 0 \\ t = 2 \text{ 에서 점 P 의 움직이는 방향이 바뀐다.} \\ &(\text{참}) \\ \neg. \quad \text{시각 } t \text{ 에서의 점 P 의 위치를 } x(t) \text{ 라 하면} \end{aligned}$$

$$x(2)=0+\int_0^2(3t^2-6t)dt=[t^3-3t^2]_0^2=-4$$

(참)

ㄷ. 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$ 라 하면
 $a(t)=6t-6$

$$6t-6=12, \quad t=3$$

$t=0$ 에서 $t=3$ 까지 움직인 거리를 s 라 하면

$$s=\int_0^3|3t^2-6t|dt$$

$$=-\int_0^2(3t^2-6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$$

$$=4+[t^3-3t^2]_2^3=8 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근

$\alpha, 0, \beta$ ($\alpha < 0 < \beta$)가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta=-\alpha$

$$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$$

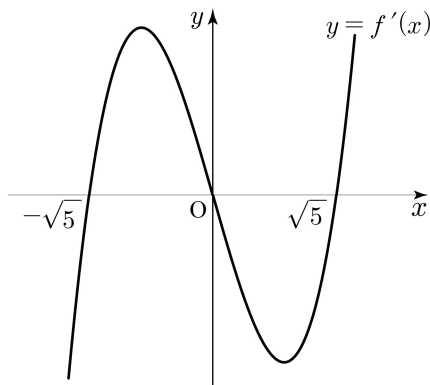
$$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수이다.})$$

$f(-x)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여

$$f(0)=9, \quad C=9$$

조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$
 $\alpha=-\sqrt{5}$

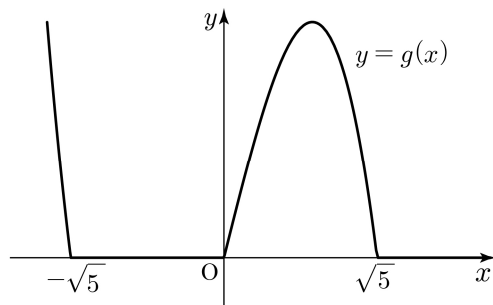
함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$ 이므로
 함수

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (f'(x) \geq 0) \\ -2f'(x) & (f'(x) < 0) \end{cases}$$

이고, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\begin{aligned} \int_0^{10} g(x)dx &= -2 \int_0^{\sqrt{5}} f'(x)dx \\ &= -2[f(x)]_0^{\sqrt{5}} = -2\{f(\sqrt{5})-f(0)\} \\ &= -2 \times (-16-9) = 50 \end{aligned}$$

16. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+a}{x+1} = b \text{에서}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+4x+a) = 0 \text{이므로 } 1-4+a=0,$$

$$a=3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+3}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = 2 = b \end{aligned}$$

따라서 $a+b=5$

17. [출제의도] 부정적분 이해하기

$$f(x) = \int (3x^2+6x-4)dx$$

$$= x^3+3x^2-4x+C$$

(단, C 는 적분상수이다.)

$$f(1)=1+3-4+C=5, \quad C=5$$

$$f(x)=x^3+3x^2-4x+5$$

$$\text{따라서 } f(2)=8+12-8+5=17$$

18. [출제의도] 미분계수 이해하기

$$f'(x)=3x^2+a$$

x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율이 $f'(a)$ 의 값과 같으므로

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = f'(a)$$

$$\frac{3^3+3a-(1^3+a)}{2} = 3a^2+a$$

$$\text{따라서 } 3a^2=13$$

19. [출제의도] 곱의 미분법을 활용하여 문제해결하기

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{x^2-4} = 2 \text{에서}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-4\} = 0 \text{이므로 } f(2)=4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x+2} \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} f'(2) = 2 \end{aligned}$$

$$f'(2)=8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+1}{x-2} = 8 \text{에서}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{g(x)+1\} = 0 \text{이므로 } g(2)=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2)=8$$

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\text{따라서 } h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=24$$

20. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

$$\angle BCA = \frac{\pi}{2}, \quad \angle CAB = \alpha \text{라 하면}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \text{이고, } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \text{이므로}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\overline{BC} = \overline{AB} \times \sin \alpha \text{이므로 } \overline{AB} = 18 \text{이고, } \overline{AC} = 6$$

점 D는 선분 AB를 5:4로 내분하는 점이므로

$$\overline{AD} = 10$$

삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos \alpha = 96$$

$$\overline{DC} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면, 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DC}}{\sin \alpha} = 2R \text{에서 } R = 3\sqrt{3}$$

삼각형 CAD의 외접원의 넓이 $S=27\pi$

$$\text{따라서 } \frac{S}{\pi} = 27$$

21. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 활용하여 문제해결하기

$a_1=a$ 라 하면

조건 (나)에 의하여

$$\{a+(k-1)d\}^2 = (a+d)\{a+(3k-2)d\}$$

$$d(k^2-5k+3)=a(k+1) \quad \cdots \text{㉠}$$

모든 항이 자연수이므로

조건 (가)에서 $0 < a \leq d$

$$a(k+1) \leq d(k+1)$$

$$k^2-5k+3 \leq k+1$$

$$k^2-6k+2 \leq 0$$

$$3-\sqrt{7} \leq k \leq 3+\sqrt{7}$$

$k \geq 3$ 이므로 자연수 $k=3, 4, 5$

㉠에서 $k^2-5k+3 > 0$ 이므로 $k=5, d=2a$

$$90 \leq a_{16} \leq 100, \quad a_{16} = a+15d = 31a$$

이므로 $a=3, d=6$

$$\text{따라서 } a_{20} = a+19d = 117$$

22. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

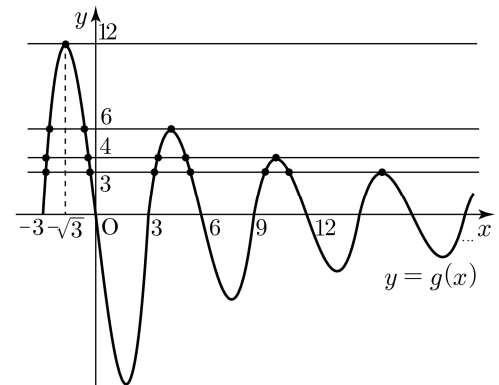
$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$$

$$f'(x) = 2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \text{이므로}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\cdots	$-\sqrt{3}$	\cdots	$\sqrt{3}$	\cdots
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	12 (극대)	\searrow	-12 (극소)	\nearrow

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k 에 대하여

$6k-3 \leq x < 6k+3$ 일 때

$$\text{함수 } g(x) = \frac{1}{k+1}f(x-6k)$$

$k+1$ 이 12의 양의 약수가 될 때

함수 $g(x)$ 의 극댓값이 자연수이므로

$k=1, 2, 3, 5, 11$ 일 때

함수 $g(x)$ 의 극댓값은

각각 6, 4, 3, 2, 1이다.

$$a_1 = 2 \times 11 + 1 = 23$$

$$a_2 = 2 \times 5 + 1 = 11$$

$$a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$a_5 = 2 \times 2 = 4$$

$$a_6 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$7 \leq n \leq 11 \text{일 때 } a_n = 2 \times 1 = 2$$

$$a_{12} = 1$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{12} a_n = 23 + 11 + 7 + 5 + 4 + 3 + 2 \times 5 + 1 = 64$$

확률과 통계 정답

23	⑤	24	③	25	②	26	①	27	④
28	⑤	29	25	30	51				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 확률 계산하기

두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\frac{11}{12} = \frac{1}{12} + P(B)$$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{5}{6}$$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

전개식의 일반항은

$${}_7C_r (2x)^{7-r} \times 1^r = {}_7C_r 2^{7-r} x^{7-r}$$

$$(r = 0, 1, 2, \dots, 7)$$

$$x^{7-r} = x^2 \text{ 에서 } r = 5$$

$$\text{따라서 } x^2 \text{ 의 계수는 } {}_7C_5 \times 2^2 = 84$$

25. [출제의도] 확률분포 이해하기

주어진 확률분포표에서

$$a + \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}a = 3a = 1$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } E(X) &= (-1) \times a + 0 \times \frac{1}{2}a + 1 \times \frac{3}{2}a \\ &= \frac{1}{2}a = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

26. [출제의도] 확률의 뜻 이해하기

$$(a-2)^2 + (b-3)^2 + (c-4)^2 = 2 \text{ 를}$$

만족시키려면

세 수 $(a-2)^2$, $(b-3)^2$, $(c-4)^2$ 중
한 개의 수가 0 이고 두 개의 수가 1 이어야 한다.

$$(a-2)^2 = 0, (b-3)^2 = 0, (c-4)^2 = 0 \text{ 이}$$

될 확률은 각각 $\frac{1}{6}$

$$(a-2)^2 = 1, (b-3)^2 = 1, (c-4)^2 = 1 \text{ 이}$$

될 확률은 각각 $\frac{1}{3}$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } {}_3C_1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수
추론하기

3 개의 문자 A , B , C 를 같은 문자 X 라 하고
6 개의 문자를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로

$$\text{나열하는 경우의 수는 } \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

가운데 문자 X 에 문자 A 를 놓고

첫 번째 문자 X 와 세 번째 문자 X 에

두 문자 B , C 를 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

$$\text{따라서 구하는 경우의 수는 } 120 \times 2 = 240$$

28. [출제의도] 정규분포의 성질 이해하기

조건 (가)에서 $Y = 3X - a$ 이므로

$$E(Y) = E(3X - a) = 3E(X) - a = 3m - a$$

$$m = 3m - a \text{ 에서 } a = 2m$$

$$\sigma(Y) = \sigma(3X - a) = 3\sigma(X) = 6$$

$$P(X \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-m}{2}\right)$$

$$P(Y \geq a) = P(Y \geq 2m) = P\left(Z \geq \frac{m}{6}\right)$$

조건 (나)에 의하여

$$\frac{4-m}{2} = -\frac{m}{6} \text{ 에서 } m = 6$$

그러므로 확률변수 Y 는 정규분포 $N(6, 6^2)$ 을
따른다.

따라서

$$\begin{aligned} P(Y \geq 9) &= P\left(Z \geq \frac{9-6}{6}\right) = P(Z \geq 0.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.5 - 0.1915 = 0.3085 \end{aligned}$$

29. [출제의도] 조건부확률을 활용하여
문제해결하기

두 수의 곱의 모든 양의 약수의 개수가 3 이하인
사건을 X , 두 수의 합이 짝수인 사건을 Y 라
하자. 사건 X 를 만족시키는 경우는 두 수 중
하나가 1 이거나 두 수가 같은 소수일 때이다.

(i) 두 수 중 하나가 1 일 때

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_{14}C_1}{{}_{15}C_2} = \frac{2}{15}$$

(ii) 두 수가 같은 소수일 때

(1) 두 수가 2 일 때

$$\frac{{}_2C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{1}{105}$$

(2) 두 수가 3 일 때

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{1}{35}$$

(3) 두 수가 5 일 때

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{2}{21}$$

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } P(X) = \frac{4}{15}$$

두 사건 X 와 Y 를 동시에 만족시키는 경우는

(i)에서 두 수가 1, 3 이거나 두 수가 1, 5 인
경우 또는 (ii)인 경우이므로

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= \frac{{}_1C_1 \times {}_3C_1 + {}_1C_1 \times {}_5C_1 + {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_5C_2}{{}_{15}C_2} \\ &= \frac{22}{105} \end{aligned}$$

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{11}{14}$$

$$\text{따라서 } p + q = 25$$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여
문제해결하기

학생 A 가 받는 검은 공의 개수와 흰 공의
개수를 각각 b , w 라 하자.

조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 (b, w) 중
학생 A 가 홀수 개의 공을 받는 경우는
(4, 3), (4, 1), (3, 2), (2, 1)

(i) 순서쌍 (b, w) 가 (4, 3) 일 때

흰 공 2 개, 빨간 공 5 개가 남으므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) 순서쌍 (b, w) 가 (4, 1) 일 때

흰 공 4 개와 빨간 공 5 개가 남으므로

세 명의 학생 B , C , D 에게 흰 공과 빨간

공을 각각 1 개씩 나누어 주고

남은 흰 공 1 개, 빨간 공 2 개를 나누어

주는 경우의 수는 다음과 같다.

흰 공 1 개를 받는 학생을 정하는

$$\text{경우의 수는 } {}_3C_1 = 3$$

세 명의 학생 B , C , D 에게 빨간 공 2 개를

나누어 줄 때, 흰 공을 받는 학생에게

빨간 공 2 개를 모두 나누어 주는 경우를

제외해야 하므로 경우의 수는

$${}_3H_2 - 1 = {}_4C_2 - 1 = 5$$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3 \times 5 = 15$

(iii) 순서쌍 (b, w) 가 (3, 2) 일 때

검은 공 1 개, 흰 공 3 개, 빨간 공 5 개가

남으므로 다음의 (1)과 (2)의 경우로 나누어
볼 수 있다.

(1) 세 명의 학생 B , C , D 중에서 한 명의

학생이 검은 공과 흰 공을 받는 경우

검은 공과 흰 공을 받는 학생을 정하는

$$\text{경우의 수는 } {}_3C_1 = 3$$

검은 공과 흰 공을 받는 학생이 B 일 때

남은 흰 공 2 개와 빨간 공 5 개는

학생 B 를 제외한 두 명의 학생 C , D 에게
나누어 준다.

두 명의 학생 C , D 에게 흰 공 1 개,

빨간 공 1 개씩을 각각 나누어 주고 남은

빨간 공 3 개를 나누어 줄 때,

한 명의 학생에게 빨간 공 3 개를 모두

나누어 주는 경우를 제외해야 하므로

$$\text{경우의 수는 } {}_2H_3 - 2 = {}_4C_3 - 2 = 2$$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$

(2) 세 명의 학생 B , C , D 중에서 한 명의

학생이 검은 공과 빨간 공을 받는 경우

검은 공과 빨간 공을 받는 학생을 정하는

$$\text{경우의 수는 } {}_3C_1 = 3$$

검은 공과 빨간 공을 받는 학생이 B 일 때

두 명의 학생 C , D 에게 흰 공 1 개,

빨간 공 1 개씩을 각각 나누어 준다.

남은 흰 공 1 개, 빨간 공 2 개에 대하여

흰 공은 학생 B 를 제외한 두 명의 학생

C , D 중에서 한 명을 택하여 나누어 주고,

빨간 공은 세 명의 학생 B , C , D 중에서

한 명을 택하여 나누어 준다.

이 때, 마지막에 흰 공을 받는 학생에게

빨간 공 2 개를 모두 나누어 주는 경우를

제외해야 하므로 경우의 수는

$$2 \times ({}_3H_2 - 1) = 2 \times ({}_4C_2 - 1) = 10$$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3 \times 10 = 30$

(iv) 순서쌍 (b, w) 가 (2, 1) 일 때

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$\text{구하는 경우의 수는 } 15 + 6 + 30 = 51$$