

수학 영역

정답

1	⑤	2	④	3	②	4	③	5	③
6	④	7	④	8	②	9	③	10	⑤
11	④	12	①	13	①	14	⑤	15	②
16	5	17	17	18	13	19	24	20	27
21	117	22	64						

해설

1. [출제의도] 지수와 로그 계산하기

$$4^{\frac{1}{2}} + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

2. [출제의도] 정적분 계산하기

$$\int_0^1 (2x+3)dx = [x^2+3x]_0^1 = 1+3=4$$

3. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - a \\ f'(1) &= 2 - a = 0 \\ \text{따라서 } a &= 2 \end{aligned}$$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \\ \text{따라서 } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

5. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기

$$\begin{aligned} \text{양변의 밑을 5로 같게 하면} \\ 5^{2x-7} &\leq 5^{-x+2} \\ 2x-7 &\leq -x+2 \text{ 에서 } x \leq 3 \\ \text{주어진 부등식을 만족시키는 자연수 } x &\text{는} \\ 1, 2, 3 \\ \text{따라서 자연수 } x \text{의 개수는 } &3 \end{aligned}$$

6. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) + \sin(\pi + \theta) &= \cos\theta - \sin\theta = \frac{3}{5} \\ (\cos\theta - \sin\theta)^2 &= \cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin\theta\cos\theta \\ 1 - 2\sin\theta\cos\theta &= \frac{9}{25} \\ \text{따라서 } \sin\theta\cos\theta &= \frac{8}{25} \end{aligned}$$

7. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$$\begin{aligned} a_1 &= 10 \text{ 이므로} \\ a_2 &= 5 - \frac{10}{10} = 4 \\ a_3 &= 5 - \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ a_4 &= -2 \times \frac{5}{2} + 3 = -2 \\ a_5 &= 5 - \frac{10}{-2} = 5 + 5 = 10 \\ &\vdots \\ a_9 &= a_5 = a_1 = 10, \quad a_{12} = a_8 = a_4 = -2 \\ \text{따라서 } a_9 + a_{12} &= 8 \end{aligned}$$

8. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

$$\begin{aligned} \text{등비수열 } \{a_n\} \text{의 일반항은 } a_n &= ar^{n-1} \\ 2a &= S_2 + S_3 \text{ 이므로} \\ 2a &= (a+ar) + (a+ar+ar^2) \\ ar(2+r) &= 0 \\ r^2 &= 64a^2 \ (a > 0) \text{ 에 의하여} \\ r \neq 0 \text{ 이므로 } r &= -2, \quad a = \frac{1}{4} \\ \text{따라서 } a_5 &= \frac{1}{4} \times (-2)^4 = 4 \end{aligned}$$

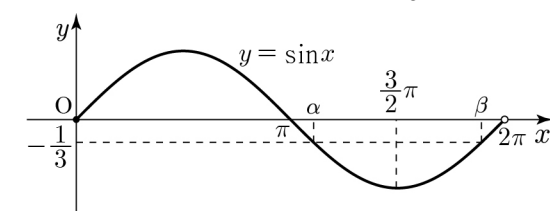
9. [출제의도] 거듭제곱근과 지수법칙 이해하기

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a})^3 &= a^{\frac{3}{n}} \\ \text{(i) } a &= 4 \text{ 일 때 } 4^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{6}{n}} \\ n \ (n \geq 2) &\text{가 6의 양의 약수이어야 하므로} \\ n &= 2, 3, 6 \\ \text{그러므로 } f(4) &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } a &= 27 \text{ 일 때 } 27^{\frac{3}{n}} = 3^{\frac{9}{n}} \\ n \ (n \geq 2) &\text{가 9의 양의 약수이어야 하므로} \\ n &= 3, 9 \\ \text{그러므로 } f(27) &= 9 \\ \text{따라서 } f(4) + f(27) &= 6 + 9 = 15 \end{aligned}$$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \text{ 이므로} \\ 3(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 1 &= 0 \\ 3\sin^2 x - 5\sin x - 2 &= 0 \\ (3\sin x + 1)(\sin x - 2) &= 0 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ 이므로 } \sin x &= -\frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{을 만족시키는 } x \text{의 값을 } x = \alpha, \beta \ (\alpha < \beta) \text{라} \\ \text{하면 } \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{3}{2}\pi \text{ 이므로 } \alpha + \beta = 3\pi \\ \text{따라서 모든 해의 합은 } &3\pi \end{aligned}$$

11. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\begin{aligned} \text{직선 } y = -2 \text{와 함수 } y = f(x) \text{의 그래프가} \\ \text{만나는 점이 A 이므로} \\ -2 &= \frac{1}{2} \log_a (x-1) - 2 \text{ 에서 } x = 2 \\ A(2, -2) \\ B\left(10, \frac{1}{2} \log_a 9 - 2\right), \quad C(10, -\log_a 8 + 1) \text{ 이고,} \\ \text{점 A와 직선 } x = 10 \text{ 사이의 거리는 8 이므로} \\ \text{삼각형 ACB의 넓이는} \\ \frac{1}{2} \times 8 \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \log_a 9 - 2 \right) - (-\log_a 8 + 1) \right\} \\ &= 4 \times (\log_a 24 - 3) = 28 \\ \log_a 24 &= 10 \\ \text{따라서 } a^{10} &= 24 \end{aligned}$$

12. [출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 3x - 5} &= 2 \text{ 이므로} \\ f(x) &= 2x^2 + ax + b \end{aligned}$$

함수 $f(x)g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) &= f(3)g(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x-3} &= 18 + 3a + b \text{ 에서} \\ (\text{분모}) \rightarrow 0 \text{ 이고 극한값이 존재하므로 } (\text{분자}) &\rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + ax + b) &= 0 \text{ 이므로 } 18 + 3a + b = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x-3} &= 0 \\ b &= -3a - 18 \text{ 이므로 } f(x) = (x-3)(2x+a+6) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (2x+a+6) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a = -12, \quad b = 18$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 18 \\ \text{따라서 } f(1) &= 8 \end{aligned}$$

13. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기
주어진 식 (*)에 의하여

$$\begin{aligned} nS_n &= \log_2 (n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \quad \dots \textcircled{1} \\ \text{이다. (*)에서 } \textcircled{1} \text{을 빼서 정리하면} \\ (n+1)S_{n+1} - nS_n &= \log_2 (n+2) - \log_2 (n+1) \\ &+ \sum_{k=1}^n S_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로} \\ \boxed{(n+1)} \times a_{n+1} &= \log_2 \frac{n+2}{n+1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이다.} \\ a_1 &= 1 = \log_2 2 \text{ 이고,} \\ 2S_2 &= \log_2 3 + S_1 = \log_2 3 + a_1 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_2 &= \log_2 \frac{3}{2} \\ \text{모든 자연수 } n \text{에 대하여} \end{aligned}$$

$$na_n = \boxed{\log_2 \frac{n+1}{n}}$$

$$\begin{aligned} \text{이다. 따라서} \\ \sum_{k=1}^n ka_k &= \sum_{k=1}^n \log_2 \frac{k+1}{k} \\ &= \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \dots + \log_2 \frac{n+1}{n} \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n+1}{n} \right) \\ &= \boxed{\log_2 (n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이다.} \\ f(n) &= n+1, \quad g(n) = \log_2 \frac{n+1}{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(n) &= \log_2 (n+1) \\ \text{따라서} \\ f(8) - g(8) + h(8) &= 9 - \log_2 \frac{9}{8} + \log_2 9 = 12 \end{aligned}$$

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

$$\begin{aligned} \neg. \quad v(t) &= 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \\ t < 2 \text{ 일 때 } v(t) &< 0 \\ t = 2 \text{ 일 때 } v(2) &= 0 \\ t > 2 \text{ 일 때 } v(t) &> 0 \\ t = 2 \text{에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다.} \\ &(\text{참}) \\ \neg. \quad \text{시각 } t \text{에서의 점 P의 위치를 } x(t) \text{라 하면} \end{aligned}$$

$$x(2)=0+\int_0^2(3t^2-6t)dt=[t^3-3t^2]_0^2=-4$$

(참)

ㄷ. 시각 t 에서의 점 P 의 가속도를 $a(t)$ 라 하면
 $a(t)=6t-6$

$$6t-6=12, \quad t=3$$

$t=0$ 에서 $t=3$ 까지 움직인 거리를 s 라 하면

$$s=\int_0^3|3t^2-6t|dt$$

$$=-\int_0^2(3t^2-6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$$

$$=4+[t^3-3t^2]_2^3=8 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근

$\alpha, 0, \beta$ ($\alpha < 0 < \beta$) 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta=-\alpha$

$$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$$

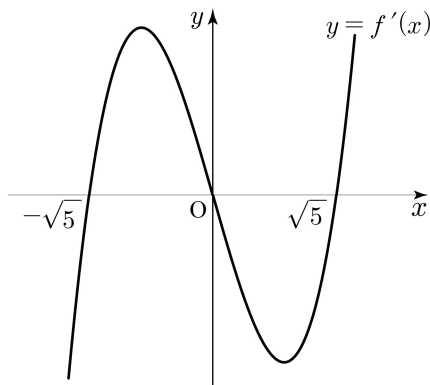
$$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C \quad (\text{단, } C \text{ 는 적분상수이다.})$$

$f(-x)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여

$$f(0)=9, \quad C=9$$

조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$
 $\alpha=-\sqrt{5}$

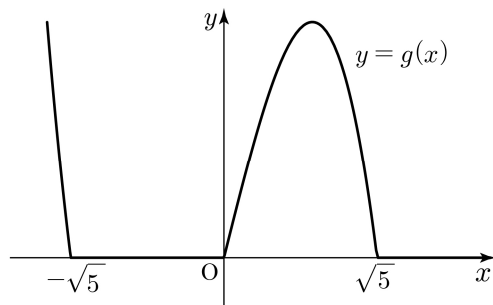
함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$ 이므로
 함수

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (f'(x) \geq 0) \\ -2f'(x) & (f'(x) < 0) \end{cases}$$

이고, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\begin{aligned} \int_0^{10} g(x)dx &= -2 \int_0^{\sqrt{5}} f'(x)dx \\ &= -2[f(x)]_0^{\sqrt{5}} = -2\{f(\sqrt{5})-f(0)\} \\ &= -2 \times (-16-9) = 50 \end{aligned}$$

16. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+a}{x+1} = b \text{ 에서}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+4x+a) = 0 \text{ 이므로 } 1-4+a=0,$$

$$a=3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+3}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = 2 = b \end{aligned}$$

따라서 $a+b=5$

17. [출제의도] 부정적분 이해하기

$$f(x) = \int (3x^2+6x-4)dx$$

$$= x^3+3x^2-4x+C$$

(단, C 는 적분상수이다.)

$$f(1)=1+3-4+C=5, \quad C=5$$

$$f(x)=x^3+3x^2-4x+5$$

$$\text{따라서 } f(2)=8+12-8+5=17$$

18. [출제의도] 미분계수 이해하기

$$f'(x)=3x^2+a$$

x 의 값이 1 에서 3 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의
 평균변화율이 $f'(a)$ 의 값과 같으므로

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = f'(a)$$

$$\frac{3^3+3a-(1^3+a)}{2} = 3a^2+a$$

$$\text{따라서 } 3a^2=13$$

19. [출제의도] 곱의 미분법을 활용하여
 문제해결하기

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{x^2-4} = 2 \text{ 에서}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-4\} = 0 \text{ 이므로 } f(2)=4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x+2} \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} f'(2) = 2 \end{aligned}$$

$$f'(2)=8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+1}{x-2} = 8 \text{ 에서}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{g(x)+1\} = 0 \text{ 이므로 } g(2)=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2)=8$$

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\text{따라서 } h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=24$$

20. [출제의도] 삼각함수를 활용하여
 문제해결하기

선분 AB 는 삼각형 ABC 의 외접원의
 지름이므로 삼각형 ABC 는 직각삼각형이다.

$$\angle BCA = \frac{\pi}{2}, \quad \angle CAB = \alpha \text{ 라 하면}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \text{ 이고, } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \text{ 이므로}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\overline{BC} = \overline{AB} \times \sin \alpha \text{ 이므로 } \overline{AB} = 18 \text{ 이고, } \overline{AC} = 6$$

점 D 는 선분 AB 를 5:4 로 내분하는 점이므로

$$\overline{AD} = 10$$

삼각형 CAD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos \alpha = 96$$

$$\overline{DC} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

삼각형 CAD 의 외접원의 반지름의 길이를
 R 라 하면, 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DC}}{\sin \alpha} = 2R \text{ 에서 } R = 3\sqrt{3}$$

삼각형 CAD 의 외접원의 넓이 $S=27\pi$

$$\text{따라서 } \frac{S}{\pi} = 27$$

21. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을
 활용하여 문제해결하기

$a_1=a$ 라 하면

조건 (나)에 의하여

$$\{a+(k-1)d\}^2 = (a+d)\{a+(3k-2)d\}$$

$$d(k^2-5k+3)=a(k+1) \quad \cdots \text{㉠}$$

모든 항이 자연수이므로

조건 (가)에서 $0 < a \leq d$

$$a(k+1) \leq d(k+1)$$

$$k^2-5k+3 \leq k+1$$

$$k^2-6k+2 \leq 0$$

$$3-\sqrt{7} \leq k \leq 3+\sqrt{7}$$

$k \geq 3$ 이므로 자연수 $k=3, 4, 5$

㉠에서 $k^2-5k+3 > 0$ 이므로 $k=5, d=2a$

$$90 \leq a_{16} \leq 100, \quad a_{16} = a+15d = 31a$$

이므로 $a=3, d=6$

$$\text{따라서 } a_{20} = a+19d = 117$$

22. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

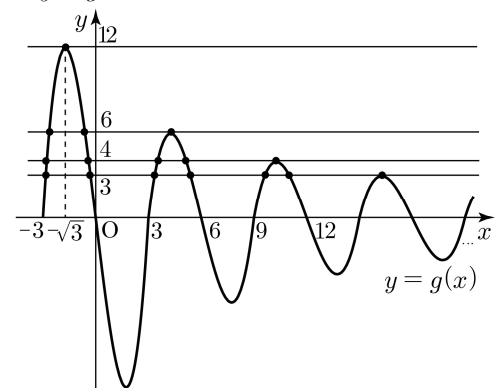
$$f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$$

$$f'(x) = 2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
 다음과 같다.

x	\cdots	$-\sqrt{3}$	\cdots	$\sqrt{3}$	\cdots
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	12 (극대)	\searrow	-12 (극소)	\nearrow

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k 에 대하여

$6k-3 \leq x < 6k+3$ 일 때

$$\text{함수 } g(x) = \frac{1}{k+1}f(x-6k)$$

$k+1$ 이 12 의 양의 약수가 될 때

함수 $g(x)$ 의 극댓값이 자연수이므로

$k=1, 2, 3, 5, 11$ 일 때

함수 $g(x)$ 의 극댓값은

각각 6, 4, 3, 2, 1 이다.

$$a_1 = 2 \times 11 + 1 = 23$$

$$a_2 = 2 \times 5 + 1 = 11$$

$$a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$a_5 = 2 \times 2 = 4$$

$$a_6 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$7 \leq n \leq 11 \text{ 일 때 } a_n = 2 \times 1 = 2$$

$$a_{12} = 1$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{12} a_n = 23 + 11 + 7 + 5 + 4 + 3 + 2 \times 5 + 1 = 64$$

미적분 정답

23	①	24	⑤	25	④	26	③	27	①
28	②	29	15	30	586				

미적분 해설

23. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{따라서 } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

24. [출제의도] 치환적분 이해하기

$\sin 2x = t$ 라 하면

$$2\cos 2x = \frac{dt}{dx}$$

$x = 0$ 일 때 $t = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ 일 때 $t = 1$ 이다.

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x \sin^2 2x dx = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

(i) $1 \leq r < 3$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{3} \right)^n = 0 \text{ 이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + r^{n+1}}{3^n + 7 \times r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r \times \left(\frac{r}{3} \right)^n}{1 + 7 \times \left(\frac{r}{3} \right)^n} = 1$$

이므로 r 는 1, 2

(ii) $r = 3$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 3^{n+1}}{3^n + 7 \times 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 3^n}{8 \times 3^n} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

주어진 식은 성립하지 않는다.

(iii) $r > 3$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{r} \right)^n = 0 \text{ 이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + r^{n+1}}{3^n + 7 \times r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{r} \right)^n + r}{\left(\frac{3}{r} \right)^n + 7} = \frac{r}{7} = 1$$

이므로 r 는 7

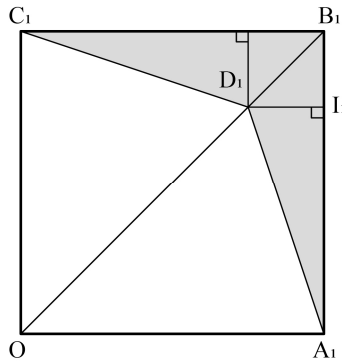
(i), (ii), (iii)에 의하여

주어진 식이 성립하도록 하는 자연수 r 는

1, 2, 7

따라서 모든 r 의 값의 합은 $1 + 2 + 7 = 10$

26. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기



$\overline{OB_1} = 4\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{D_1B_1} = \sqrt{2}$

점 D_1 에서 직선 A_1B_1 에 내린 수선의 발을

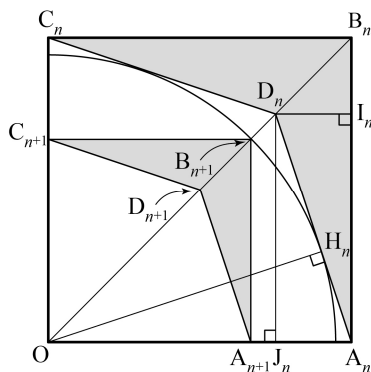
I_1 이라 하면 $\overline{D_1I_1} = 1$

두 삼각형 $A_1B_1D_1$, $B_1C_1D_1$ 의 넓이는 모두

2 이므로 $S_1 = 4$

네 선분 A_nB_n , B_nC_n , C_nD_n , D_nA_n 으로

둘러싸인 ∇ 모양의 도형의 넓이를 T_n 이라 하자.



그럼 R_n 에서 중심이 O 이고

두 직선 A_nD_n , C_nD_n 에 동시에 접하는 원과

직선 A_nD_n 이 접하는 점을 H_n 이라 하고,

점 D_n 에서 두 직선 A_nB_n , OA_n 에 내린

수선의 발을 각각 I_n , J_n 이라 하자.

$$\overline{A_nI_n} = \overline{D_nJ_n} = \frac{3}{4} \overline{OA_n}, \quad \overline{D_nI_n} = \frac{1}{4} \overline{OA_n} \text{ 이므로}$$

$$\overline{A_nD_n} = \frac{\sqrt{10}}{4} \overline{OA_n}$$

삼각형 OA_nD_n 에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{A_nD_n} \times \overline{OH_n} = \frac{1}{2} \times \overline{OA_n} \times \overline{D_nJ_n}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{4} \overline{OA_n} \times \overline{OH_n} = \frac{1}{2} \times \overline{OA_n} \times \frac{3}{4} \overline{OA_n}$$

$$\overline{OH_n} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \overline{OA_n}$$

$$\overline{OA_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{OB_{n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{OH_n} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \overline{OA_n}$$

두 정사각형 $OA_nB_nC_n$ 과 $OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 의

답음비는

$$\overline{OA_n} : \overline{OA_{n+1}} = 1 : \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$T_n : T_{n+1} = 1 : \frac{9}{20}$$

$$T_{n+1} = \frac{9}{20} T_n$$

그러므로 수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1 = S_1 = 4$ 이

고

공비가 $\frac{9}{20}$ 인 등비수열이다.

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{4}{1 - \frac{9}{20}} = \frac{80}{11}$$

27. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

함수 $f(x) = xe^{-2x}$ 이라 하면

$$f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$$

$$f''(x) = (4x - 4)e^{-2x} = 0 \text{ 에서 } x = 1$$

$x < 1$ 에서 $f''(x) < 0$ 이고,

$x > 1$ 에서 $f''(x) > 0$ 이다.

$x = 1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로

변곡점 A 의 좌표는 $(1, e^{-2})$

$$f'(1) = -e^{-2} \text{ 이므로}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 A 에서의

접선의 방정식은

$$y - e^{-2} = -e^{-2}(x - 1)$$

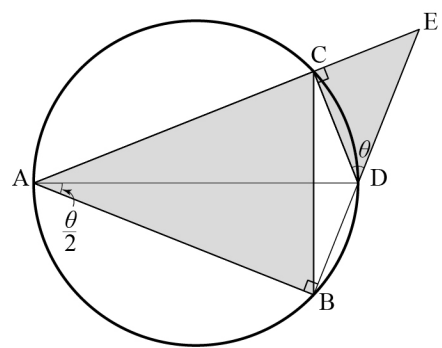
$$y = -e^{-2}(x - 2)$$

그러므로 점 B 의 좌표는 $(2, 0)$

따라서 삼각형 OAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times e^{-2} = e^{-2}$$

28. [출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기



$\angle ABD = \frac{\pi}{2}$ 이므로 선분 AD 는 원의 지름이다.

$$\angle ECD = \frac{\pi}{2}, \quad \angle DAB = \angle CAD = \frac{\theta}{2}$$

$$\overline{AB} = 10\cos \frac{\theta}{2}, \quad \overline{CD} = \overline{BD} = 10\sin \frac{\theta}{2}$$

$$\angle AEB = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ 이므로 } \angle CDE = \theta$$

$$\overline{CE} = 10\sin \frac{\theta}{2} \tan \theta$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \left(10\cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \times \sin \theta$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times 10\sin \frac{\theta}{2} \times 10\sin \frac{\theta}{2} \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{50 \sin^2 \frac{\theta}{2} \tan \theta}{\theta^2 \times 50 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} \tan \theta}{\theta^2 \times \sin \theta} \right\} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \times \frac{\tan \theta}{\theta} \times \frac{\theta}{\sin \theta} \right\} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

29. [출제의도] 역함수의 미분법을 활용하여
문제해결하기

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서
미분가능하므로 연속함수이다.

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$h(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} h(x) \text{에서}$$

$$h(0) = 0 \text{이고 } f(g^{-1}(0)) = 0$$

$$g^{-1}(0) = \alpha \text{라 하면 } f(\alpha) = 0, g(\alpha) = 0$$

$f(\alpha) = 0$ 에서

$$\alpha = -1 \text{ 또는 } \alpha = 0 \text{ 또는 } \alpha = 1 \dots \textcircled{1}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$h(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} h(x) \text{에서}$$

$$h(1) = 0 \text{이고 } f(g^{-1}(1)) = 0$$

$$g(0) = 1 \text{이므로 } g^{-1}(1) = 0 \text{이고 } f(0) = 0 \text{이므로}$$

$f(g^{-1}(1)) = 0$ 은 성립한다.

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(g^{-1}(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\pi} \sin \pi x}{x} = 1$$

$$f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0) = 1$$

$$g^{-1}(0) = \alpha \text{이고 } (g^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{g'(\alpha)} \text{이므로}$$

$$f'(\alpha) \times \frac{1}{g'(\alpha)} = 1$$

$$f'(\alpha) = g'(\alpha)$$

$$3\alpha^2 - 1 = 3a\alpha^2 + 2\alpha + b \dots \textcircled{2}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{\pi} \sin \pi x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(g^{-1}(x))}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{\pi} \sin \pi x}{x - 1} \text{에서 } x - 1 = t \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{\pi} \sin \pi x}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{-\sin \pi t}{\pi t} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(g^{-1}(x))}{x - 1} = -1 \text{에서}$$

$$f'(g^{-1}(1))(g^{-1})'(1) = -1$$

$$g^{-1}(1) = 0 \text{이고 } (g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(0)} \text{이므로}$$

$$f'(0) \times \frac{1}{g'(0)} = -1$$

$$f'(0) = -1 \text{이므로}$$

$$g'(0) = b = 1$$

삼차함수 $g(x)$ 는 역함수 $g^{-1}(x)$ 를 가지고

$$g'(0) = 1 > 0 \text{이므로 증가함수이다.}$$

$$g(\alpha) = 0, g(0) = 1 \text{이므로 } \alpha < 0$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } \alpha = -1$$

$$\textcircled{2} \text{에 의하여 } a = 1$$

$$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\text{따라서 } g(a+b) = g(2) = 15$$

30. [출제의도] 적분법을 활용하여 문제해결하기

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10} f'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{10f(x)} \{10 - f(x)\}$$

$$g'(x) = 0 \text{이 되려면 } f'(x) = 0 \text{ 또는 } f(x) = 10$$

$$f'(x) = 2ax \text{이므로 } x = 0 \text{일 때에만 } f'(x) = 0$$

(i) 방정식 $f(x) - 10 = 0$ 이 실근을 갖지 않을
때, $f'(0) = 0, f(x) > 10$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	\dots	0	\dots
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	\nearrow	극대	\searrow

(ii) 방정식 $f(x) - 10 = 0$ 이 중근을 가질 때,
 $f'(0) = 0, f(0) = 10, f(x) \geq 10$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	\dots	0	\dots
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	\nearrow	극대	\searrow

(i), (ii)의 경우에는 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서
극댓값을 갖는다.

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) 방정식 $f(x) - 10 = 0$ 이 서로 다른

두 실근을 가질 때,

방정식 $f(x) - 10 = 0$ 의 서로 다른

두 실근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면 $\alpha = -\beta$

$$f(-x) = f(x) \text{이므로 } g(-x) = g(x)$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭이므로

$$g(\alpha) = g(\beta)$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	\dots	α	\dots	0	\dots	β	\dots
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow

(iii)의 경우에는 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서
극솟값을 가지므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$$f(0) = b < f(\alpha) = 10 \text{이므로}$$

$$1 \leq b < 10$$

$$g(0) = \ln f(0) - \frac{1}{10} (f(0) - 1)$$

$$= \ln b - \frac{1}{10} (b - 1)$$

$$p(x) = \ln x - \frac{1}{10} (x - 1) \text{이라 하면}$$

$$p'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{10} = \frac{10 - x}{10x}$$

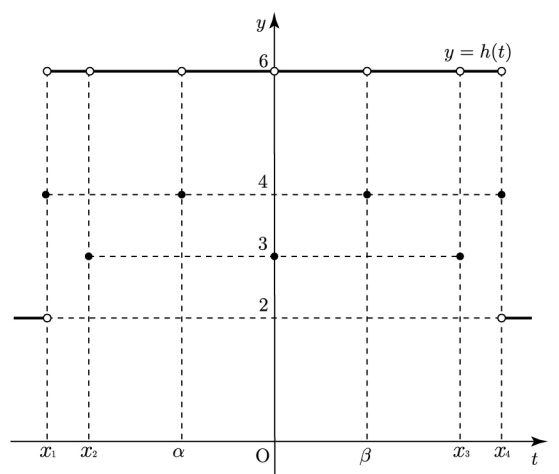
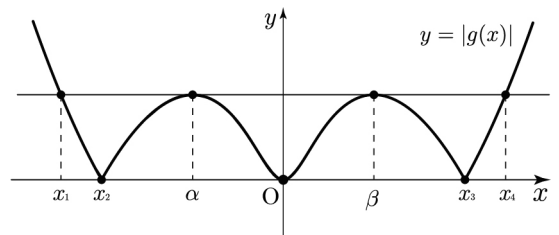
$$1 \leq x < 10 \text{일 때 } p'(x) > 0 \text{이므로}$$

$p(x)$ 는 증가함수이다.

$$g(0) \geq p(1) = 0$$

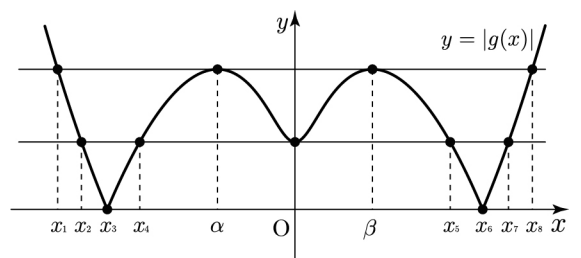
함수 $|g(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음 2가지
경우와 같다.

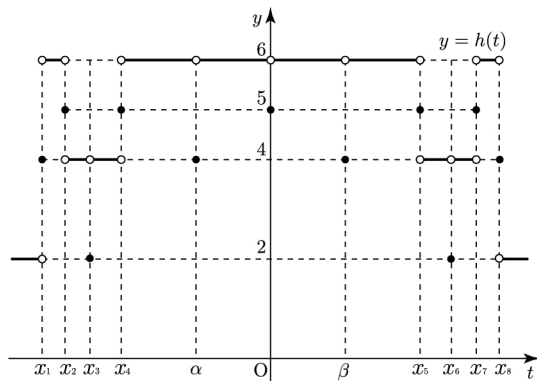
(1) $g(0) = 0$ 일 때



함수 $h(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 k 의 값의
개수는 7이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(2) $g(0) > 0$ 일 때





함수 $h(t)$ 가 $t = k$ 에서 불연속인 k 의 값의 개수는 11 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(0) = 0$

$0 = g(0) = p(b) \geq p(1) = 0$ 이므로

$p(b) = p(1)$

함수 $p(x)$ 는 $1 \leq x < 10$ 에서

증가함수이므로 $b = 1$, $f(x) = ax^2 + 1$

$$\int_0^a e^x f(x) dx$$

$$= \int_0^a (ax^2 + 1)e^x dx$$

$$= [(ax^2 + 1)e^x]_0^a - \int_0^a 2ax e^x dx$$

$$= (a^3 + 1)e^a - 1 - [2ax e^x]_0^a + \int_0^a 2ae^x dx$$

$$= (a^3 + 1)e^a - 1 - 2a^2 e^a + [2ae^x]_0^a$$

$$= (a^3 - 2a^2 + 2a + 1)e^a - 2a - 1$$

$$me^a - 19 = (a^3 - 2a^2 + 2a + 1)e^a - 2a - 1$$

따라서 $a = 9$ 이므로

$$m = a^3 - 2a^2 + 2a + 1 = 586$$